ISSN: 2181-3906
2025

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

# IKKI O‘LCHOVLI TERMOELASTIK MASALALAR VA ULARNING CHEKLI ELEMENTLAR USULI YORDAMIDA YECHISH

**Islamov Xasan Toxtamuratovich**

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti,

«Amaliy matematika va intellektual texnologiyalar» fakulteti, 2-bosqich magistranti.

***e-mail:*** ***hasanislamov5891@gmail.com***

***https://doi.org/10.5281/zenodo.15210406***

***Annotatsiya***. *Ushbu maqolada ikki o'lchovli termoelastiklik masalasining chekli elementlar usuli yordamida sonli yechimi ko'rib chiqilgan. Tekis deformatsiya holatidagi termoelastik muammoning matematik modeli, uni yechish algoritmi va Python dasturlash tilida yaratilgan dastur kodi batafsil bayon qilingan. Issiqlik o'tkazuvchanlik va mexanik deformatsiyalar bog'langan holda yechilgan bo'lib, hisoblash natijalari grafik shaklda taqdim etilgan. Olingan natijalar asosida harorat taqsimoti, termik deformatsiyalar va kuchlanishlar tahlil qilingan hamda yechimning amaliy ahamiyati ko'rsatilgan. Maqolada taklif etilgan metodika mexanika va materiallar muhandisligi sohasida issiqlik va mexanik ta'sirlarni baholash uchun foydalanilishi mumkin.*

***Kalit so‘zlar:*** *Termoelastiklik, ikki o‘lchovli masala, chekli elementlar usuli, tekis deformatsiya, issiqlik o'tkazuvchanlik, termik kengayish, sonli yechim, Python dasturi, deformatsiyalar, kuchlanish tahlili.*

# ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

***Аннотация.*** *В данной статье рассматривается численное решение двумерной задачи термоупругости с использованием метода конечных элементов. Подробно изложены математическая модель термоупругой задачи в условиях плоской деформации, алгоритм её решения и программный код, реализованный на языке программирования Python. Задача решалась с учетом взаимосвязи теплопроводности и механических деформаций, а результаты расчетов представлены в графическом виде. На основе полученных результатов проведён анализ распределения температуры, термических деформаций и напряжений, а также показано практическое значение решения. Предложенная методика может быть использована для оценки тепловых и механических воздействий в области механики и инженерии материалов.*

ISSN: 2181-3906
2025

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

***Ключевые слова:*** *Термоупругость, двумерная задача, метод конечных элементов, плоская деформация, теплопроводность, термическое расширение, численное решение, программа на Python, деформации, анализ напряжений.*

## TWO-DIMENSIONAL THERMOELASTIC PROBLEMS AND THEIR SOLUTION USING THE FINITE ELEMENT METHOD

***Abstract.*** *This article discusses the numerical solution of a two-dimensional thermoelasticity problem using the Finite Element Method. The mathematical model of the thermoelastic problem under plane strain conditions, the solution algorithm, and the Python program code are described in detail. The problem is solved by considering the coupling between heat conduction and mechanical deformations, and the computational results are presented in graphical form. Based on the obtained results, the temperature distribution, thermal deformations, and stresses are analyzed, and the practical significance of the solution is demonstrated. The proposed methodology can be applied to assess thermal and mechanical effects in the fields of mechanics and materials engineering.*

***Keywords:*** *Thermoelasticity, two-dimensional problem, finite element method, plane strain, heat conduction, thermal expansion, numerical solution, Python program, deformations, stress analysis.*

**Kirish**.Termoelastiklik nazariyasi qattiq jismlarda issiqlik va mexanik maydonlarning o'zaro ta'sirini o'rganadi. Bunda harorat o'zgarishi natijasida materiallarda qo'shimcha deformatsiyalar va kuchlanishlar yuzaga keladi. Ushbu nazariyaning amaliy ahamiyati juda yuqori, chunki aerokosmik injeneriya, mashinasozlik va qurilishda konstruksiyalar bir vaqtda mexanik yuklama va harorat ta'siriga uchraydi. Termik kengayish va termal kuchlanishlarni inobatga olmaslik materialning yorilishiga yoki konstruksiyaning ishdan chiqishiga olib kelishi mumkin.

Shuning uchun termoelastiklik masalalarini aniq tahlil qilish va ularning sonli yechimlarini topish dolzarb hisoblanadi. Ikki o'lchovli (tekis deformatsiya holati uchun) termoelastik masalani ko'rib chiqish orqali biz issiqlik ta'siridagi deformatsiyalarni bashorat qilish usullarini ko'rsatamiz.

Tekis deformatsiya holatidagi termoelastik masalaning matematik modeli ikkita fizik jarayonni tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemasidan iborat:

ISSN: 2181-3906 2025
International scientific journal «MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi Stasionar holatda (va ichki issiqlik manbalarisiz) temperatura maydoni $T(x,y)$ Laplas tenglamasiga bo'ysunadi:

$$\nabla^2 T = 0, \text{ ya'ni } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

bu yerda $T = T(x,y)$ - harorat funksiyasi. Chegaraviy shartlar sifatida jismining qirralarida haroratning berilgan qiymati (Dirixle sharti) yoki issiqlik oqimi (Neumann sharti) belgilanishi mumkin.

**Mexanik muvozanat tenglamalari**. Tekis deformatsiya holatida (z yo'nalishda deformatsiya $\varepsilon_{zz} = 0$ deb faraz qilinadi) elastik muvozanat tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

bu yerda $\sigma_{ij}(i,j = x,y)$ komponentlari kuchlanish (stress) tensori bo'lib, ular $u(x,y)$ va $v(x,y)$ siljish (displacement) funksiyalari orqali aniqlanadi. Kichik deformatsiyalar chegarasida $\varepsilon_{ij}$ nisbiy deformatsiya tenzori quyidagicha ifodalanadi:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Kuchlanish-deformatsiya bog'lanishi (Guk qonuni, termik kengayish bilan)

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - K\Delta T$$
$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - K\Delta T$$
$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

bu yerda:$G$ - siljish moduli, $\lambda$ - Lamé doimiysi; u materialning Yung moduli $E$ va Puasson koeffitsienti $\nu$ orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

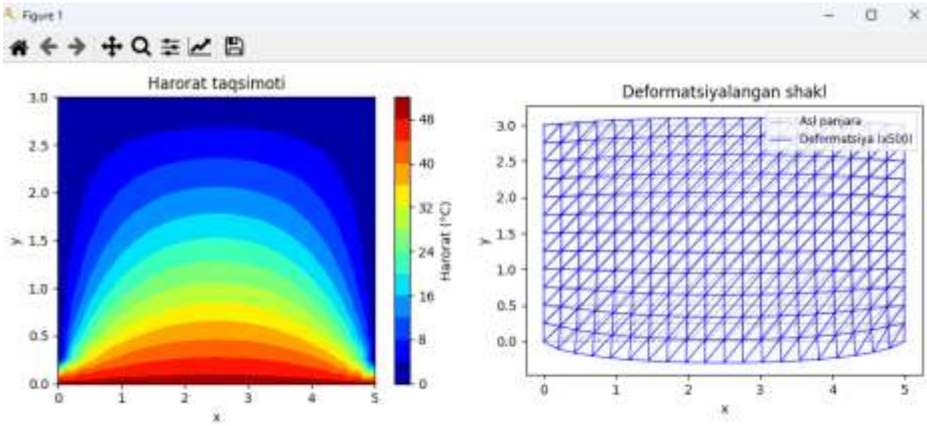
$K = 2G\alpha + 3\lambda\alpha$ - termik kengayishdan kelib chiqadigan koeffitsient,

$\Delta T = T - T_0$ – jismning dastlabki $T_0$ haroratdan farqi,$\alpha$-chiziqli termik kengayish koeffitsienti.

**Natijalar**. Yuqorida bayon etilgan matematik model asosida ishlab chiqilgan dastur sinov tarigasida kvadrat shaklidagi plastinkaning termoelastik masalasiga qo'llanildi. O'lchamlari $5 \times 3$ birlik bo'lgan plastina tekislikda tahlil qilinadi. Plastina issiqlik va elastiklik xossalariga ega: elastiklik moduli: 500|00, Puasson koeffitsienti: 0.2, issiglik kengayish koeffitsienti: $1 \times 10^{-5}$, Plastina uchburchak elementlarga bo'linadi va pastki chegara $T = 50°C$, boshqa barcha

ISSN: 2181-3906
2025
International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

chegaralar $T = 0^{\circ}C$. Mexanik chegaraviy shartlar chap va o'ng chegaralarda $\boldsymbol{u_x = 0, uy = 0}$ Masala issiglik tarqalishi va natijaviy termal deformatsiyalarni aniqlashga qaratilgan. Natijada harorat taqsimoti va deformatsiyalangan shakl grafik ko'rinishda chiqadi. Plastinkaning markaziy qismiga nisbatan yugori harorat, chetlariga esa nisbatan past harorat berildi (masalan, markazda $T = T_{\max}$, tashqi chegaralarda esa $T = T_{\min}$ ). Chegaralarda haroratning bunday taqsimlanishi plastinka markazida termik kengayishning katta bo'lishiga, chetlar esa sovuqroq bo'lgani sababli kengayishning cheklanishiga olib keladi. Natijada, markaziy hududda yuqori sigilish kuchlanishlari hosil bo'lishi kutiladi, chekkalarda esa cho'zilish kuchlanishlari paydo bo'lishi mumkin.




Rasm 1. Plastinkadagi harorat taqsimoti va deformatsiyalangan shakl.

**Xulosa.** Hisoblash natijalariga ko'ra, plastinka markazidagi tugun harorati $T_{\max}$ ga yetgan. Shu nuqtada kuzatilgan gorizontal siljish taxminan $u_{\max} \approx 1.0 \text{ mm}$ ni tashkil etdi.

Vertikal yo'nalishda esa sijjish sodir bo'lmagan (plastinka qalinligi yo'nalishida deformatsiya mavjud emas), ya'ni plastinka faqat tekislikda kengaygan (tekis deformatsiya holatida qalinlik bo'ylab sijjishlar nolga teng).

Plastinkaning chetlarida siljishlar nolga teng deb hisoblangan (chetlar mahkamlangan deb faraz qilingan), eng katta deformatsiya esa markaziy qismda kuzatildi. Temperaturalar farqi tufayli hosil bo'lgan maksimal ekvivalent termik kuchlanish ham markaziy mintaqada joylashgan bo'lib, u materialning mustahkamlik chegarasidan oshmaganligi tasdiqlandi.

Olingan natijalar termoelastik nazariyaning sifat jihatidan bashoratlarini tasdiqlaydi: erkin kengayishga to'sqinlik qilinganda, issiqlik ta'siri ostida siqilish kuchlanishlari hosil bo'ladi va bu kuchlanishlar eng issiq (ya'ni eng katta $\Delta T$ ) hududda maksimal bo'ladi. Grafik tahlil (Rasm 1) orqali ko'rinib turibdiki, harorat gradienti katta bo'lgan joylarda deformatsiya ham sezilarli bo'ladi.

Shuningdek, markaziy tugunlardagi harorat va siljish miqdorlari o'zaro bog'liq: harorat qanchalik yuqori bo'lsa, siljish ham shunchalik katta bo'ladi.

**REFERENCES**

1. Boley B.A., Weiner J.H. Theory of Thermal Stresses. – New York: John Wiley & Sons, 1960. – 586 p.
2. Timoshenko S., Goodier J.N. Theory of Elasticity. 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 567 p.
3. Sokolnikoff I.S. Mathematical Theory of Elasticity. 2nd ed. – New York: McGraw-Hill, 1956. – 386 p.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. 5th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 112 p.
5. Bathe K.J. Finite Element Procedures. 2nd ed. - New Jersey: Prentice Hall, 2014. – 206 p.
6. Reddy J.N. An Introduction to the Finite Element Method. 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 2005. – 672 p.
7. Reddy J.N. Energy and Variational Methods in Applied Mechanics. 2nd ed. – New York: John Wiley & Sons, 2002. – 337 p.