FUNKSIYONAL TENGLAMALARNI YECHISHNING BA'ZI USULLARI

Sattarov Ermamat Norkulovich
O'zbekiston-Finlandiya Pedagogika Instituti, professori
E-mail: *Sattorov-e@rambler.ru*
Baltabayev Javohir Bog'ibek o'g'li
O'zbekiston -Finlandiya Pedagogika Instituti 4- bosqich talabasi
E-mail: *javohirbaltabayev95@gmail.com*

https://doi.org/10.5281/zenodo.15091382

Annotatsiya. *Mazkur maqolada akademik litsey va kasb-hunar kollejlari va matematika faniga ixtisoslashgan maktabning yuqori sinf o'quvchilari uchun olimpiyada masalalarida uchraydigan ayrim funksiyonal tenglamalarning yechish usullariga urg'u qaratilgan.*

Kalit so'zlar: *o'zgaruvchi miqdor, noma'lum funksiya, funksional tenglama, uzliksiz funksiya, umumiy yechim, metod , qulay usul,tushunarlilik,soda yechim.*

SOME METHODS OF SOLVING FUNCTIONAL EQUATIONS

Abstract. *This article discusses ways to solve some of the functional equations encountered in Olympic problems for high school and high school students.*

Keywords: *variable, unknown function, functional equation, continuous function, general solution.*

Maktab va akademik litsey matematikasida o'rganiladigan tenglamalarni yechishning asosiy maqsadi bazi-bir noma'lum o'zgaruvchi miqdorning sonli qiymatlarini topishdan iborat.

Shu bilan birga ayrim masalalar to'plamida, olimpiada va konkurs masalalarida uchraydigan tenglamalar ham uchraydiki, bu tenglamalarni yechishning asosiy maqsadi noma'lum o'zgaruvchi miqdorning sonli qiymatlarini emas, balki noma'lum funksiyalarni topishdan iborat.

Misol uchun

$$4f(x+1) = f(x) - 2x,$$
$$f(xy) = f(x)\cdot f(y),$$
$$xf(x) + f\left(\frac{1}{\alpha - x}\right) = x$$

va yana boshqa shunday turdagi tenglamalar uchrashadi, bunday tenglamalarda noma'lum o'zgaruvchi endi bazi funksiyalardan iborat. Misol uchun yuqoridagi tenglamalarda noma'lum o'zgaruvchi ( ) f (x) funksiyasidan iborat.

Bunday tenglamalar funksional tenglamalar bo‘lib hisoblanadi. Funksional tenglamalarning yechimi umumiy yechim va xususiy yechim bo‘lib ajraladi.

Funksional tenglamalarni qanoatlantiradigan funksiya yoki funksiyalar sinfi xususiy yechim bo‘lib topiladi. Funksional tenglamalarni qanoatlantiradigan funksiyalar yoki funksiyalar sinfining yig‘indisi umumiy yechim bo‘lib hisoblanadi. Maktab va akademik litsey matematikasida ko‘proq o‘rganiladigan funksional tenglamalarning biri Koshi tenglamalari sinfiga kiradigan

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),$$
$$f(xy)=f(x)+f(y),$$
$$f(xy)=f(x)f(y)$$

ko‘rinishdagi tenglamalarni ham qaraydi. Shu sababli bu tenglamalar ko‘pincha Koshining funksional tenglamalari deyiladi. Bu tenglamalarning yechimlari elementar matematikadan ma’lum bo‘lgan ko‘rsatkichli, logarifmik va darajali funksiyalar orqali ko‘rsatiladi. Quyida Koshi tenglamalarini yechishga olib kelinadigan matematikaning ayrim masalalarini qaraymiz. 1-misol.

Mayli tekislikda shunday egri chiziqni topish talab etilsinki, bu egri chiziqning bo‘yida yotgan ixtiyoriy ikki nuqta uchun birining absissasi, ikkinchisining ordinatasiga ko‘paytmasining yig‘indisi, absissasi shu ikki nuqtaning absissalarining ko‘paytmasiga teng bo‘lgan uchinchi nuqtaning ordinatasiga teng bo‘lsin. Yechilishi. Masalani yechish uchun grafigi uzliksiz bo‘lgan va argumentning musbat qiymatlarida aniqlangan funksiyani topish bilan chegaralanamiz.

Berilgan masalani yechish

$$f(xy)=xf(y)+yf(x)$$

ko‘rinishdagi funksional tenglamani yechishga olib kelinadi. Mayli $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ belgilashni kiritaylik. U holda berilgan tenglamadan Koshi tenglamalarining biri bo‘lib topiladigan $g(xy)=g(x)+g(y)$ tenglamasiga ega bo‘lamiz. x> 0uchun ( ) g(x) uzliksiz funksiya bo‘lishidan, bu tenglamaning yechimi $g(x)=C\ln x$ bo‘ladi, bu erda C erkli o‘zgarmas.

1-misol. x>0 uchun aniqlangan va $f(f(x))=xf(x)$ tenglamasini qanoatlantiradigan uzliksiz f(x) funksiyasini toping.

Yechish. Tenglamaning ko‘rinishidan, noldan farqli hech qanday o‘zgarmas son (2) tenglamani qanoatlantirmasligi aniq.

Shuning bilan birga xning mumkin bo‘lgan qiymatlarida (2) dan f(x)>0 bo‘lishi kelib chiqadi. Mayli f(x)= y bo‘lsin, u holda (2) ni f(y)= xy ko‘rinishda yozib, bundan f(f(y))= f(xy) tengligi kelib chiqadi. Shu bilan birga (2) dan x ni y bilan almashtirib va y=f (x) ekanligini hisobga olib

$$f(f(y)) = y\,f(y) = f(x)f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

tengligiga ega bo‘lamiz. Bu Koshining funksional tenglamasi bo‘lib topiladi. Uning noldan farqli uzliksiz yechimi $f(x) = x^a$ funksiyasi (2) tenglamani a ning barcha qiymatlarida qanoatlantirmaydi. Shu maqsatda bu funksiyani berilgan tenglamadagi o‘rinlariga qo‘yib, a ning kerakli qiymatlarini saylab olamiz.

$f(x) = x^a$ ni (2) tenglamaga qo‘ysak $x^{a^2} = x^{a+1}$ bo‘ladi. Bundan $a^2 = a+1$ bo‘lib, $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ bo‘ladi, demak $f(x) = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ va $f(x) = x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ funksiyalari (2) tenglamani qanoatlantiradi. Shunday qilib berilgan tenglamaning yechimlari

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \quad f(x) = x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

funksiyalari bo‘lib topiladi. Bazi-bir funksional tenglamalarni yechish jarayonida tenglamaning ikki tomonidan hosila olish maqsadga muofiq bo‘ladi. Bu holda berilgan tenglamada noma’lum funksiya bilan birga uning hosilasida qatnashib, tenglama differensial tenglamaning bir turiga aylanadi. Bu usul Koshining funksional tenglamalarini yechish paytida yechimni differensiallanuvchi funksiyalar sinfidan izlangan paytda foydalaniladi.

3-misol. Agar f(1)=3 va f(2)=7 bo lsa

$$f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2)$$

rekurrentlik nisbat yordamida berilgan ketma-ketlikning n hadining formulasini aniqlaylik.

Yechilishi. Masalani yechish uchun dastlab izlanuvchi funksiyaning bir necha qiymatlarini aniqlaymiz:

$$f(3) = 3f(2) - 2f(1) = 15,$$
$$f(4) = 3f(3) - 2f(2) = 31.$$

Bu ikkalasidan quyidagicha xulosaga kelamiz

$$f(n) = 2^{n+1} - 1$$

endi matematik induksiya yordamida topilgan bu formulaning to‘g‘riligini tekshiramiz. Dastlab n=1 uchun $f(1) = 3 = 2^2 - 1$ ni hisoblaymiz. Endi $f(1) = 3 = 2^2 - 1$ uchun $f(k) = 2^{k+1} - 1$ tengligini to‘g‘ri deb faraz qilib, rekurrentlik nisbat bo‘yicha $f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2) = 3(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 1$ tengligiga ega bo‘lamiz. Shunday qilib (3) ning barcha natural sonlar uchun to‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi. Maktab va akademik litsey o‘quvchilari bilan bu kabi dars va darsdan tashqari mashg‘ulotlarni tashkil etish iqtidorli o‘quvchilarni matematika olimpiadalariga tayyorlashda o‘zining ijobiy natijasini beradi.

REFERENCES

1. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Бекимов М.А. Халқаро математика Солимпиада масалалари. Тошкент, 2012. –224 в.
2. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. Киев. «Вища школа». 1983.
3. Satimov Farrux Zafarovich CHEMISTRY STUDENTS IN A SCHOOL CHEMISTRY COURSE PISA TESTS FOR KNOWLEDGE BUILDING PLACE AND SIGNIFICANCE // Modern Science and Research. 2024.T.3.-№. 5.-C. 1171-1174,
4. SatimovFarruxZafarovich MAKTAB KIMYO KURSIDA O'QUVCHILARDA KIMYO FANIGA OID BILIMLARINI SHAKLLANTIRISHDA PISA TESTLARNING O'RNI VA AHAMIYATI// Modern Science and Research. 2024. T. 3.-№. 5.-C. 1171-1174,