МУНТАЗАМ КЎПЁҚЛИК ҚИРРАЛАРИДА ҚУВИШ-ҚОЧИШ ЎЙИНИ.

Туракулова Шаҳноза Абдурашидовна

ТМС институти “Амалий математика ва информатика” кафедраси ўқитувчиси.

https://doi.org/10.5281/zenodo.11428676

Аннотация. *Мазкур мақола мунтазам кўпёқлик қирраларидаги қувиш-қочиш ўйинининг назарияси ва амалий жиҳатларини ўрганади. Ушбу ўйинлар, одатда комбинаторик ўйин назарияси ва граф назариясида тадқиқ қилинади, бунда ъқувувчиъ ва ъқочувчиъ кўпёқликнинг қирралари бўйлаб ҳаракатланиб, бир-бирини тутиш ёки қочиб кетишга ҳаракат қилади. Мақолада ушбу ўзаро таъсирларни тасвирловчи асосий принсиплари, стратегиялари ва математик моделлари кенг ёритилган. Шунингдек, турли мунтазам кўпёқлик турларини ўз ичига олган мисоллар кўриб чиқилиб, умумий стратегиялар ва натижалар таҳлил қилинади. Ушбу иш ўйин назарияси, геометрик моделлар ва стратегик муаммолар ечишга қизиққан математик ва компютер фанлари бўйича тадқиқотчилар ва талабаларга мўлжалланган.*

Калит сўзлар: *Мунтазам кўпёқлик, Қувиш-қочиш ўйини, Комбинаторик ўйин назарияси, Граф назарияси, Математик моделлаш, Стратегик режалаштириш, Геометрик моделлар, Ўйин назарияси.*

A CHASE GAME AT THE EDGES OF THE REGULAR MULTIPLE.

Abstract. *This paper explores the theory and practical aspects of the chase-escape game on the edges of regular polynomials. These games are usually studied in combinatorial game theory and graph theory, where the 'chaser' and 'escaper' move along the edges of the polyhedron, trying to catch or escape each other. The main principles, strategies and mathematical models describing these interactions are extensively covered in the article. Examples involving different types of regular polynomials are also considered, and general strategies and results are analyzed. This work is intended for researchers and students of mathematical and computer science interested in game theory, geometric models, and strategic problem solving.*

Key words: *Regular polynomial, Escape game, Combinatorial game theory, Graph theory, Mathematical modeling, Strategic planning, Geometric models, Game theory.*

ИГРА В ПОГОНЮ НА КРАЯХ ОБЫЧНОГО МНОГОКРАТНОГО.

Аннотация. *В статье исследуются теоретические и практические аспекты игры «побег-побег» на рёбрах правильных многочленов. Эти игры обычно изучаются в рамках комбинаторной теории игр и теории графов, где «преследователь» и «убегающий» движутся по краям многогранника, пытаясь поймать или ускользнуть друг от друга. В статье подробно освещены основные принципы, стратегии и математические модели, описывающие эти взаимодействия. Также рассматриваются примеры, включающие различные типы правильных полиномов, анализируются общие стратегии и результаты. Эта работа предназначена для исследователей и студентов, изучающих математику и информатику, интересующихся теорией игр, геометрическими моделями и решением стратегических задач.*

Ключевые слова: *Регулярный полином, Игра Escape, Комбинаторная теория игр, Теория графов, Математическое моделирование, Стратегическое планирование, Геометрические модели, Теория игр.*

Олий математикада «Дифференциал ўйин» тушунчасини дастлаб америкалик математик Р. Айзекс ўзининг илмий ишларида киритган. Унинг тадқиқотлари 1965 йилда «Дифференциал ўйинлар» номли монографиясида нашр этилиб, унда қисман назарий масалалар ва кўплаб мисоллар кўриб чиқилган. Шу вақтнинг ўзида Л. С. Понтрягин ва унинг шогирдлари томонидан оптимал жараёнларнинг математик назарияси яратилди.

Кейинчалик, ушбу назарияни ривожлантириш асосида зиддиятили бошқарувли масалалар сифатида қарашни таклиф қилди. Бундай қараш Е. Ф. Мишенко, Р. В. Гамкрелидзе, М. И. Зеликин, Н. Ю. Сатимов, М. С. Никольский, А. А. Чикрия, А. А. Азамов, Е. С. Половинкин, А. П. Пономарев, П. К. Гусятников, Н. Л. Григоренко ва бошқалар томонидан ривожлантирилди. Чекли вақт оралиқларида дифференциал тенгламаларнинг умумий назарияси Н. Н. Красовский томонидан яратилиб, Ю. С. Осипов, А. Б. Куржанский, А. В. Кряжимский, А. И. Субботин, Н. Н. Субботина, Е. И. Третьяков, В. Н. Ушаков, Ю. С. Лукоянов, А. М. Тарасьев ва бошқалар томонидан ривожлантирилди.

Н. Н. Красовскийнинг ёндашувида содда дифференциал ўйин ҳам иккита боғлиқсиз масалаларга, яъни биринчи ўйинчига нисбатан иккинчи ўйинчининг қаршилигида бошқариш ва иккинчи ўйинчига нисбатан биринчи ўйинчининг қаршилигини инобатга олгандаги бошқариш масалаларига бўлинади. Лекин бу ерда Понтрягиннинг ёндашувидан фарқли равишда ихтиёрий табиат стратегиясига йўл қўйилади. Дифференциал ўйинлар назариясига яна бир ёндашув Дж. фон Нейманнинг ўйинлар назарияси асосида ривожланди.

Бундай ёндашув кўп иштирокчилик дифференциал ўйинларни тадқиқ қилишда самарали бўлиб, Л. А. Петросян, Н. Н. Петров, А. Фридман, Т. Эллиот, Ж. Калтон ва бошқалар томонидан ўрганилди. Л. С. Понтрягиннинг ғояларини ва ўйинлар назариясининг ёндашувларини мос келтирувчи ёндашув Б. Н. Пшеничников томонидан киритилиб, А. А. Азамов, В. В. Остапенко, Г. В. Томский, А. З. Фазилов ва бошқалар томонидан такомиллаштирилди.

Оптимал бошқарув ва дифференциал ўйинлар бўйича илмий мактабга Ўзбекистонда 1970 йилларда Н. Ю. Сатимов томонидан шакллантирилди. Мазкур мактаб вакиллари томонидан қувиш-қочиш дифференциал ва дискрет ўйинлари ечишнинг янги усуллари тақдим этилди. Дифференциал ўйинларга бағишланган кўплаб ишларда қийматлари компакт тўпламда қаралиб, бошқарув функцияси ўлчовли ўйинларга қўллаш мумкин дейилган. Кўплаб амалий дифференциал ўйинларда фазавий нуқтаси берилган ёпиқ тўплам ичида қолмаслиги керак. Бундай талаб фазавий чегаралаш дейилади ва бундай чегаралаш дифференциал ўйинларни ечишни жуда мураккаблаштиради. Шунингдек, бундай ўйинларни самарали ҳал қилиш усуллари шу кунгача ишлаб чиқилмаган. Мана шу сабабларга кўра фазавий чегаралашларга эга дифференциал ўйинлар синфларини турли ҳил соддалаштирувчи фаразлар билан ўрганиш табиий. Бундай синфларга геометрик графлардаги қувиш-қочиш ўйинлари киради.

Графлардаги динамик ўйинларнинг бир нечта турлари мавжуд бўлиб, улардан биринчиси ва чуқур ўрганилгани абстракт графлардаги синфидир. Бундай ўйинларда нуқта графнинг бир учидан бошқасига сакраб ўтади. Бундай ўйинлар сирага шахмат ва «Ним» каби стол ўйинлари киради. Аксарият ҳолатда, ихтиёрий қувиш-қочиш ўйинини кўп қадамли графлардаги ўйинлардек апкорсимация қилиш мумкин. Абстракт графлардаги ўйинлар Э. Цермело, К. Берже, Б. Куммер, Р. Дж. Новаковский, А. Квиллиат, М. Айгнер, М. Фромме, А. Бонато, П. Пралат, Б. Боллобаш, Г. Кун, Н. Е. Кларк, Б. С. Шредер ва бошқалар томонидан ўрганилган. Хусусан, немис математиги Т. Андреа қувиш-қочиш масаласини бир нечта графлар учун ечиб, граф хоссалари ва қувиш масаласининг ечимлилиги орасида боғлиқлик ўрнатган. М. Айгер ва М. Фромме ихтиёрий планар графда қувиш масаласининг ечимга эга бўлиши учун учта қувувчи етарли эканлигини исботлаганлар. Графлардаги динамик ўйинларнинг нисбатан торроқ синфини евклид фазосидаги графлар қирраларида ҳаракатланувчи нуқталари бўлган қувиш-қочиш ўйинлари ташкил қилади. Бундай турдаги динамик ўйинлар А. А. Азамов томонидан киритилиб, Н. А. Алмос, Т. Ибайдуллаев, Г. Ибрагимов ва бошқалар томонидан такомиллаштирилмоқда. Таъкидлаш жоизки, динамик ўйинлар назариясида графлар геометрик бўлиши, яъни унинг қирралари тўғри чизиқ бўлиб, графларнинг ўзи эса евклид фазосида бўлиши зарур. Шунинг учун, ечимга нафақат графнинг тузилиши (граф учлари ва қирралари инцидентлилиги) ва топологияси (масалан, циклларнинг мураккаблиги), балки қирралари узунлиги ҳам таъсир қилади. Ушбу мақолада ихтиёрий ўлчамдаги Евклид фазосида мунтазам кўпёқликларнинг бир ўлчовли синчларидан ташкил топган графда динамик ўйинлар ўрганилган ва қувувчи нуқталар сонига боғлиқ равишда эчиш мезонлари ишлаб чиқилган.

Масаланинг қўйилиши:

Берилган R^d Евклид фазосидаги чекли G – геометрик граф қирраларида ҳаракатланадиган иккита ўйин иштирокчилари: ҳаракати бошқариладиган $\mathbf{P}=\{P_1, P_2,\dots,P_m\}$ нуқталардан иборат қувувчи жамоа ва ҳаракати бошқариладиган Q нуқтадан иборат қочувчи иштирокидаги қувиш-қочиш ўйинини қарайлик. $\mathbf{P}(t) = (P_1(t),P_2(t),\dots,P_m(t)),\ Q(t) \in G,\ t \geq 0$ (абсолют-узлуксиз функциялар) нуқталарнинг траекториялари бўлсин. Нуқталарнинг тезликлари $dP_k(t)/dt = u_k,\ dQ(t)/dt = v,\ k=1,2,\dots,m,\ \mathbf{U}=(u_1,u_2,\dots,u_m)\in \mathbb{R}^{md}$, максимал тезликлари $\left|dP_k(t)/dt\right| \leq r_k,\ k=1,2,\dots,m,\ \left|Q(t)/dt\right| \leq s$ ва улар ушбу $1 = s \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m > 0$ шартни қаноатлантирсин.

1-таъриф. Ҳар бир $\mathbf{P}$ ва Q нуқталарнинг ҳолатига $v,\ |v| \leq s$ вектор ва мусбат d сонни мос қўювчи Y акслантириш, қочувчининг стратегияси дейилади.

Агар $Y(\mathbf{P},Q) = (v,d)$ бўлса, у ҳолда (v,d) ни $(\mathbf{P},Q)$ вазиятдаги (Q нуқта учун) V стратегиянинг кўрсатмаси деб номлаймиз.

2-таъриф. Ҳар бир $\mathbf{P}$, Q нуқталар жуфтлигига, v, $|v|$ J s вектор ва мусбат d сонга $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $|u_k|$ J r_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ тўплам ва мусбат e, e J d сонни мос қўювчи X акслантириш, қувувчининг стратегияси дейилади.

Агар $X(\mathbf{P}, Q, v, d) = (\mathbf{U}, e)$ бўлса, у ҳолда $(\mathbf{U}, e)$ ни $(\mathbf{P}, Q, v)$ вазиятдаги (P_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ нуқталар учун) $\mathbf{U}$ стратегиянинг кўрсатмаси деб номлаймиз.

Жараён ўйинчиларнинг $\mathbf{P_0} = \mathbf{P}(0) = \{P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0)\}$, $Q_0 = Q(0) \in \Gamma$ берилган позициясидан бошланади.

Ўйинчиларнинг мақсади ўйинда ғолиб чиқиш. Қувувчининг мақсади қочувчини тутиш, қочувчининг мақсади қувувчига тутилмаслик. Ўйинчиларнинг мақсадига эришиши ўйинчиларнинг бошланғич $\mathbf{P_0}, Q_0 \in \Gamma$ ҳолатига ва улар танлайдиган стратегияларга боғлиқ.

Γ графнинг қирралар тўпламини $E(\Gamma)$ орқали белгилайлик.

Қувиш масаласи. Қувувчи шундай X€ стратегиясини тузиш керакки, қочувчининг ҳар қандай Y стратегияси учун

$$\forall \mathbf{P}_0,\ \forall Q_0,\ \exists T,\ \exists k\ \ P_k(T, \mathbf{P}_0, Q_0, \hat{X}, Y) \in E,\ \ Q(T, \mathbf{P}_0, Q_0, \hat{X}, Y) \in E,\ E \in E(\Gamma)$$

бўлсин.

Қочиш масаласи. Қувувчи шундай Y€ стратегиясини тузиш керакки, қочувчининг ҳар қандай X стратегияси учун

$$\$\mathbf{P}_0, \$Q_0, "t, "k\ \ P_k(t, \mathbf{P}_0, Q_0, X, Y€)\ №\ Q(t, \mathbf{P}_0, Q_0, X, Y€).$$

бўлсин.

Ушбу масалаларнинг ҳар бирининг ечилиши, шунингдек, уларнинг ўзаро боғлиқлиги Γ графга ва $0 < \rho_m \le \ldots \le \rho_1 \le \sigma = 1$ сонлар тўпламига боғлиқ. Бундай берилганлар билан геометрик графда ўйин аниқланади.

Геометрик графда, агар ҳар қандай бошланғич ҳолат учун қувиш масаласи ечилиши мумкин бўлса, ўйин қувувчининг фойдасига ва агар камида битта бошланғич ҳолат учун қочиш масаласи ечилиши мумкин бўлса, ўйин қочувчининг фойдасига ҳал бўлади.

$N(\Gamma)$ орқали қувувчиларнинг минимал сонини белгилаймиз, бунда $N(\Gamma) \le m$ бўлганда ўйин қувувчи жамоа фойдасига, $N(\Gamma) > m$ бўлганда эса қочувчи фойдасига ҳал бўлади.

Ушбу мақолада уч ўлчамли Эвклид фазосидаги M – мунтазам кўпёқлик (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр)нинг бир ўлчамли синчидан ташкил топган граф учун $N(M)$ сонини топишдан иборат.

Асосий натижалар:

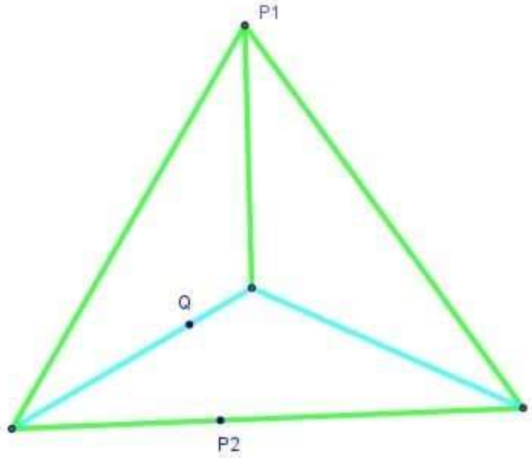
Айтайлик M графнинг қирралари узунлиги 1 га ва қирраларда ҳаракатланадиган нуқталарнинг максимал тезликлари $\rho_1 = \rho_1 = \ \ldots = \rho_m = \sigma = 1$ га тенг бўлсин. Энди $\mathbb{R}^3$ Евклид фазосидаги 5 та мунтазам кўпёқликлар – T -тетраэдр, O -октаэдр, K -куб, I -икосаэдр ва D -додекаэдрнинг қирраларидан иборат графда қўйилган қувиш-қочиш ўйинини қараймиз ва $N(M),\ M \in \{T, O, K, I, D\}$ сонини топамиз.

1-теорема. $N(T) = N(O) = N(K) = N(I) = N(D) = 2.$

Исбот: T, O, K, I, D графлар циклга эга бўлганлиги учун қочувчи битта қувувчига тутилмайди (2-мисолга қаранг). Бу ҳолатда қочувчи графнинг бирор циклида қувувчи билан орасидаги масофани 1 бирликдан ортиқроқ қилиб сақлаб юриинг кифоя.

Енди ҳар бир T, O, K, I, D графда иккита P_1, P_2 қувувчи Q қочувчини тутишини кўрсатамиз.

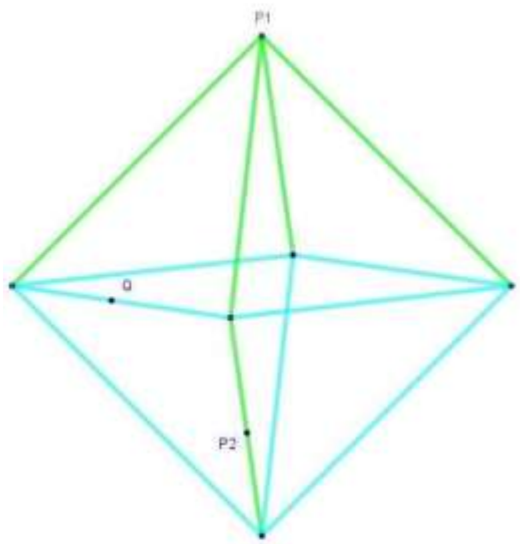
T **-тетраэдр.** Ўйин ихтиёрий вазиятдан бошланган бўлсин. Чекли $t = t_1,\ t_1 \geq 0$ вақтда P_1 қувувчи тетраэдрнинг A учини эгалласин ва P_2 қувувчи Q қочувчини таъқиб қилаётган бўлсин (1-чизма). Агар $t = t_1$ вақтда Q қочувчи T -тетраэдрнинг A учидан чиқувчи $AA_1, AA_2,\ AA_3$ қирраларидан бирида бўлса, у ҳолда шу вақтда қочувчи P_1 қувувчи томонидан тутилади. Агар $t = t_1$ вақтда Q қочувчи $AA_1, AA_2,\ AA_3$ қирраларнинг ҳеч бирида бўлмаса, у ҳолда P_1 қувувчи A учда ҳаракатланмай туради, P_2 қувувчи эса қочувчини таъқиб қилишни давом этдиради.



1-чизма.

Тетраэдрнинг $T \setminus \{AA_1, AA_2, AA_3\}$ қисмида цикл мавжуд эмас (1-мисолга қаранг). Шунинг учун Q қочувчи $t = t_2,\, t_2 > t_1$ вақтда $T \setminus \{AA_1, AA_2, AA_3\}$ графда P_2 қувувчига ёки A_1, A_2, A_3 учлардан бирига келганда P_1 қувувчига тутилади. Демак иккита қувувчи қочувчини тутиши кўрсатилди.

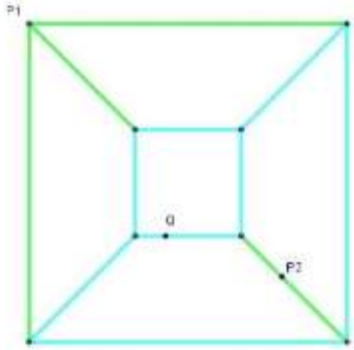
O **-октаэдр.** Ўйин бошланганидан чекли $t = t_1,\, t_1 \ge 0$ вақтдан сўнг P_1 қувувчи октаэдрнинг A учини эгалласин ва P_2 қувувчи Q қочувчини таъқиб қилаётган бўлсин (2-чизма).



2-чизма.

Агар $t = t_1$ вақтда Q қочувчи O -октаэдрнинг A учидан чиқувчи $AA_1, AA_2,\, AA_3, AA_4$ қирраларидан бирида бўлса, у ҳолда шу вақтда қочувчи P_1 қувувчи томонидан тутилади. Агар $t = t_1$ вақтда Q қочувчи $AA_1, AA_2,\, AA_3, AA_4$ қирраларда бўлмаса, у ҳолда P_1 қувувчи A учда ҳаракатланмай туради, P_2 қувувчи эса қочувчини таъқиб қилишни давом этдиради. Октаэдрнинг $O \setminus \{AA_1, AA_2, AA_3, AA_4\}$ қисмида цикл мавжуд бўлмаганлиги учун Q қочувчи $t = t_2,\, t_2 > t_1$ вақтда ёки $O \setminus \{AA_1, AA_2, AA_3, AA_4\}$ графда P_2 қувувчига ёки A_1, A_2, A_3, A_4 учлардан бирига келганда P_1 қувувчига тутилади. Демак иккита қувувчи қочувчини тутиши кўрсатилди.

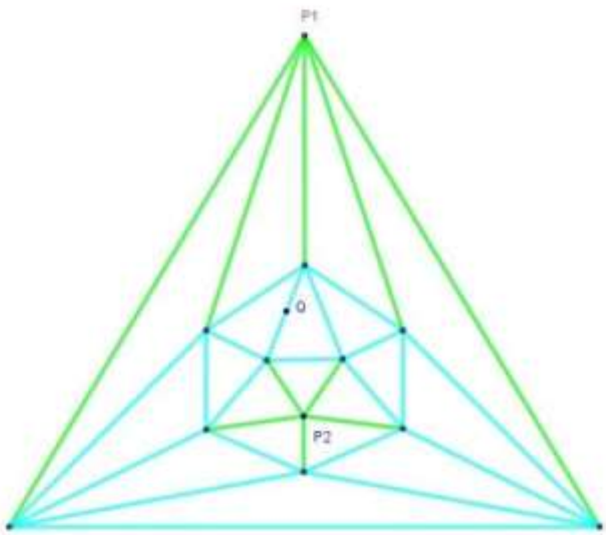
K **-куб.** Айтайлик ўйин ихтиёрий вазиятдан бошлансин. Чекли $t = t_1,\, t_1 \ge 0$ вақтда P_1 қувувчи кубнинг A учини эгалласин ва P_2 қувувчи Q қочувчини таъқиб қилаётган бўлсин (3-чизма).



3-чизма.

Агар $t = t_1$ вақтда Q қочувчи K -кубнинг A учидан чиқувчи AA_1, AA_2, AA_3 қирраларидан бирида бўлса, у ҳолда шу вақтда қочувчи P_1 қувувчига тутилади. Агар $t = t_1$ вақтда Q қочувчи AA_1, AA_2, AA_3 қирраларда бўлмаса, у ҳолда P_1 қувувчи A учда ҳаракатланмай туради, P_2 қувувчи эса қочувчини таъқиб қилишни давом этдиради. $K \setminus \{AA_1, AA_2, AA_3\}$ қисмграфда цикл мавжуд бўлмагани учун Q қочувчи $t = t_2,\, t_2 > t_1$ вақтда P_2 қувувчига ёки A_1, A_2, A_3 учлардан бирига келганда P_1 қувувчига тутилади. Демак иккита қувувчи қочувчини тутиши кўрсатилди.

I **-икосаэдр.** Ўйин бошланганидан чекли $t = t_1,\, t_1 \geq 0$ вақт ўтиб P_1 қувувчи икосаэдрнинг A учини, P_2 қувувчи $\bar{A}$ учини (A ва $\bar{A}$ қарама-қарши учлар) эгалласин (4-чизма). Агар $t = t_1$ вақтда Q қочувчи A учидан чиқувчи $AA_1, AA_2, AA_3, AA_4, AA_5$ қирраларидан бирида ёки $\bar{A}$ учидан чиқувчи $\bar{A}\bar{A}_1, \bar{A}\bar{A}_2, \bar{A}\bar{A}_3, \bar{A}\bar{A}_4, \bar{A}\bar{A}_5$ қирраларидан бирида бўлса, у ҳолда шу вақтда қочувчи P_1 қувувчига ёки P_2 қувувчига тутилади.



ISSN: 2181-3906 2024

International scientific journal «MODERN SCIENCE AND RESEARCH»

VOLUME 3 / ISSUE 5 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

4-чизма.

Агар $t=t_1$ вақтда Q қочувчи A ва $\overline{A}$ учлардан чиыувчи қирраларда бўлмаса, у ҳолда у қуйидаги 3 хил ҳолатда бўлиши мумкин.

I. Q қочувчи A_iA_j қиррада. Бу ерда $A_i, A_j,\ i, j=1,2,3,4,5$ учлар A нинг қўшни учлари.

II. Q қочувчи $\overline{A}_i\overline{A}_j$ қиррада. Бу ерда $\overline{A}_i, \overline{A}_j,\ i, j=1,2,3,4,5$ учлар $\overline{A}$ нинг қўшни учлари.

III. Q қочувчи $A_i\overline{A}_j$ қиррада. Бу ерда $A_i, \overline{A}_j,\ i, j=1,2,3,4,5$ учлар мос равишда A ва $\overline{A}$ учларнинг қўшни учлари.

Энди ҳар бир ҳолатни алоҳида қараб чиқамиз. Бунда қувувчилар қандай ҳаракат қилишини айтамиз.

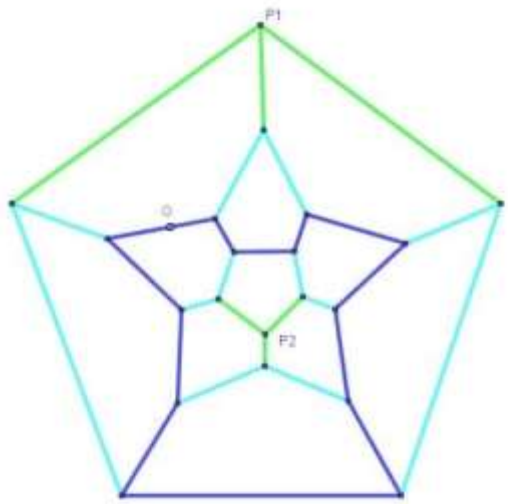
I. Ушбу ҳолатда P_1 қувувчи A учда ҳаракатланмай туради, P_2 қувувчи қочувчини таъқиб қилади. Натижада $t=t_2,\ t_2>t_1$ вақтда Q қочувчи P_2 қувувчига ёки $A_i, A_j, i, j=1,2,3,4,5$ учлардан бирига келганда P_1 қувувчига тутилади.

II. Ушбу ҳолатда P_2 қувувчи $\overline{A}$ учда ҳаракатланмай туради, P_1 қувувчи қочувчини таъқиб қилади. Натижада $t=t_2,\ t_2>t_1$ вақтда Q қочувчи P_1 қувувчига ёки $\overline{A}_i, \overline{A}_j, i, j=1,2,3,4,5$ учлардан бирига келганда P_2 қувувчига тутилади.

III. Ушбу ҳолатда эса, P_1 қувувчи $A_i,\ i=1,2,3,4,5$ уч томон, P_2 қувувчи $\overline{A}_j,\ j=1,2,3,4,5$ уч томон ҳаракатланади. Натижада $t=t_2,\ t_2>t_1$ вақтда Q қочувчи P_1 ёки P_2 қувувчига тутилади.

Демак барча ҳолатларда иккита қувувчи қочувчини тутиши кўрсатилди.

D **-додекаэдр.** Ўйин бошланганидан чекли $t=t_1,\ t_1\geq 0$ вақт ўтиб P_1 қувувчи додекаэдрнинг A учини, P_2 қувувчи $\overline{A}$ учини (A ва $\overline{A}$ қарама-қарши учлар) эгалласин (5-чизма). Агар $t=t_1$ вақтда Q қочувчи A учидан чиқувчи $AA_1, AA_2,\ AA_3,\ AA_4,\ AA_5$ қирраларидан бирида ёки $\overline{A}$ учидан чиқувчи $\overline{A}\overline{A}_1, \overline{A}\overline{A}_2,\ \overline{A}\overline{A}_3,\ \overline{A}\overline{A}_4,\ \overline{A}\overline{A}_5$ қирраларидан бирида бўлса, у ҳолда шу вақтда қочувчи P_1 қувувчига ёки P_2 қувувчига тутилади.



5-чизма

REFERENCES

1. Азамов А.А. Основания теории дискретных игр. – Ташкент: Niso Poligraf, 2011.
2. Азамов А.А., Ибайдуллаев Т.Т. Дифференциальная игра сближения-уклонения с медленными преследователями на графе ребер симплекса. I. Математическая Теория Игр и её Приложения, (12) 4, 2020. – С. 7-23.
3. Азамов А.А., Кучкаров, А.Ш., Холбоев А.Г. Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников III. Математическая Теория Игр и её Приложения, (11) 4, 2019. С. 5-23.
4. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников при наличии “медленных” преследователей. Uzbek Mathematical Journal, 2017, – № 1, – С. 140-145.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
6. Берже М. Геометрия. I том. – Москва: Мир, 1984, – 560 с.
7. Булгакова М.А., Петросян Л.А. Многошаговые игры с попарным взаимодействием на полном графе, МТИиП. 2019. Т. 11, вып. 1. – С. 3–20.
8. Понтрягин Л.С., Мищенко А.С. Линейная дифференциальная игра преследования (аналитическая теория), Матем. сб., 1986, том 131(173), – № 2(10), – С. 131–158.
9. Aigner M., Fromme M. A game of cops and robbers, Discrete Appl. Math, 1984. – №8. – P. 1–11.
10. Andreae T. Note on a pursuit game played on graphs, DiscreteAppl. Math, 1984. – №9.– P. 111–115