

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

Ережепова Ширин Курбаназаровна

ассистент кафедры «Дифференциальные уравнения» КГУ имени Бердаха.

Адрес: г.Нукус, ул Багдат 180, тел.+ 998907288639

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21908543>

Рассмотрим поперечные колебания тонкой балки. Главное отличие колебаний балки от поперечных колебаний струны состоит в том, что балка оказывает сопротивление изгибу. Колебания балки, зажатой на одном конце, описываются уравнением [3]

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \tag{1}$$

(здесь $u = u(x, t)$ – смещение балки). Граничными условиями для заданного конца ($x = 0$) является неподвижность балки и горизонтальность касательной $\left(\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0\right)$, на

свободном конце ($x = l$) должны равняться нулю изгибающий момент

$$M = -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} J \quad (E - \text{модуль упругости материала балки, } J - \text{момент инерции сечения}$$

$$\text{балки относительно своей горизонтальной оси) и тангенциальная сила } F = -EJ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Отметим, что в уравнении (1) $a^2 = -EJ/\rho S$ (ρ – плотность материала балки, S – площадь поперечного сечения балки).

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u_{xx}(l, t) = 0, \quad u_{xxx}(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \tag{4}$$

Будем решать эту задачу методом разделения переменных [1] в предположении, что ищутся периодические по времени t колебания балки.

Полагая $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ и подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (2), получим [2]

$$X(x) \cdot T''(t) + a^2 X^{IV}(x) \cdot T(t) = 0.$$

откуда следует

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Ясно, что $\lambda > 0$ (для существования периодических по t решений). Для функции $X(x)$ получаем задачу о собственных колебаниях

$$X^{IV}(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (5)$$

при граничных условиях

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X''(l) = 0, \quad X'''(x) = 0. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (5) представляется в виде

$$X(x) = A \operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda} x) + B \operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda} x) + C \cos(\sqrt[4]{\lambda} x) + D \sin(\sqrt[4]{\lambda} x).$$

Из условий $X(0) = 0, X'(0) = 0$ находим, что $A + C = 0, B + D = 0$. Отсюда следует

$$X(x) = A \left[\operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda} x) - \cos(\sqrt[4]{\lambda} x) \right] + B \left[\operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda} x) - \sin(\sqrt[4]{\lambda} x) \right].$$

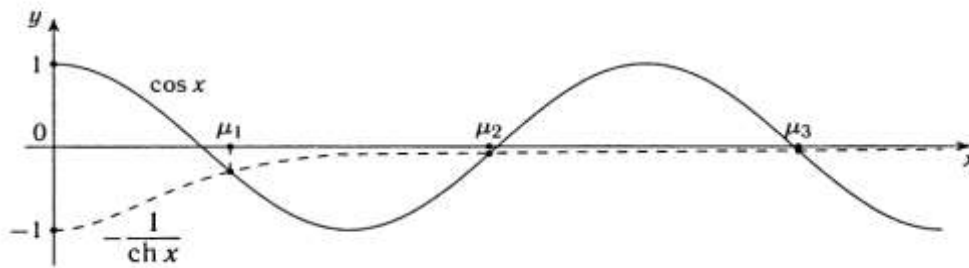


Рис. 1. Определение корней уравнения $\cos x \operatorname{ch} x = -1$.

Граничные условия (6) на правом конце балки дают

$$\begin{cases} A \left[\operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda} x) + \cos(\sqrt[4]{\lambda} x) \right] + B \left[\operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda} x) + \sin(\sqrt[4]{\lambda} x) \right] = 0, \\ A \left[\operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda} x) - \sin(\sqrt[4]{\lambda} x) \right] + B \left[\operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda} x) + \cos(\sqrt[4]{\lambda} x) \right] = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Однородная система (относительно неизвестных A и B) (7) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda} x) + \cos(\sqrt[4]{\lambda} x) & \operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda} x) + \sin(\sqrt[4]{\lambda} x) \\ \operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda} x) - \sin(\sqrt[4]{\lambda} x) & \operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda} x) + \cos(\sqrt[4]{\lambda} x) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) получаем алгебраическое уравнение для вычисления собственных значений задачи

$$\operatorname{sh}^2(\sqrt[4]{\lambda} l) - \sin^2(\sqrt[4]{\lambda} l) = \operatorname{ch}^2(\sqrt[4]{\lambda} l) + 2 \operatorname{ch}^2(\sqrt[4]{\lambda} l) \cos^2(\sqrt[4]{\lambda} l) + \cos^2(\sqrt[4]{\lambda} l). \quad (9)$$

Обозначив $\mu = \sqrt[4]{\lambda l}$ и воспользовавшись равенством $sh^2 x + 1 = ch^2 x$, из уравнения (9) найдем

$$ch\mu \cdot \cos \mu = -1 \tag{10}$$

Это уравнение можно решить графически (рис. 1). Корни уравнения (10) суть

$$\mu_1 = 1,875; \quad \mu_2 = 4,694; \quad \mu_3 = 7,854; \quad \mu_n \approx \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad \text{при } n > 3.$$

Далее, для функции $T(t)$ имеем уравнение

$$T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0.$$

Его общее решение записывается в виде

$$T_n(t) = A_n \cos\left(a\sqrt{\lambda_n}t\right) + B_n \sin\left(a\sqrt{\lambda_n}t\right) = A_n \cos\left(a\frac{\mu_n^2}{l^2}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{\mu_n^2}{l^2}t\right),$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Следовательно, «атомы» решения задачи (2), (3) образуются функциями

$$u_n(x,t) = \left[A_n \cos\left(a\frac{\mu_n^2}{l^2}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{\mu_n^2}{l^2}t\right) \right] \cdot X_n(x),$$

где

$$X_n(x) = \frac{(sh\mu_n + \sin \mu_n) \left[ch\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) - \cos\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) \right]}{sh\mu_n + \sin \mu_n} - \\ - \frac{(ch\mu_n + \cos \mu_n) \left[sh\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) - \sin\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) \right]}{sh\mu_n + \sin \mu_n}.$$

Согласно общей теории задачи Штурма-Лиувилля собственные функции $\{X_n(x)\}_{n=1}^\infty$ образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[0, l]$.

Тогда решение задачи (2) - (4) дается рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \left[A_n \cos\left(a\frac{\mu_n^2}{l^2}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{\mu_n^2}{l^2}t\right) \right] \cdot X_n(x),$$

где коэффициенты A_n и B_n – определяются из начальных условий по формулам

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\|X_n(x)\|^2}, \quad B_n = \frac{\int_0^l g(x) X_n(x) dx}{a \frac{\mu_n^2}{l} \|X_n(x)\|^2},$$

где

$$\|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx.$$

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М: 1971.- 512 С.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1958.
3. Доев В.С. Поперечные колебания балок. М:-2016 КНОРУС, 412 С.