

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Отарова Ж.А.

Хакбергенова Н.Ф.

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21908430>

Аннотация. В работе исследуется смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка, содержащего пространственную инволюцию.

Рассматривается задача с отклоняющимся аргументом вида $1-x$, позволяющая учитывать симметрию исследуемого процесса. Для исследования применяется метод разделения переменных, в результате которого исходная смешанная задача сводится к спектральной задаче относительно пространственной переменной.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, система Дирака, спектральная задача, собственные значения, собственные функции.

В последние годы наблюдается устойчивый интерес к исследованию дифференциальных уравнений, содержащих преобразования аргумента. Одним из наиболее важных случаев является инволюционное преобразование, удовлетворяющее условию

$$v(v(x)) = x.$$

Подобные уравнения возникают при математическом моделировании процессов, обладающих внутренней симметрией, и находят применение в задачах математической физики, механики, теории управления и других областях прикладной математики [1,2].

В отличие от классических дифференциальных уравнений, уравнения с инволюцией содержат значения неизвестной функции или её производной в симметричной точке области определения. Это приводит к появлению новых спектральных свойств исследуемых операторов и требует разработки специальных методов исследования [2,3].

Одним из наиболее эффективных методов исследования подобных задач является метод разделения переменных. Однако непосредственное применение данного метода к уравнениям с инволюцией затруднительно вследствие присутствия отклоняющегося аргумента. Поэтому возникает необходимость преобразования спектральной задачи к более удобному виду [3,4].

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с пространственной инволюцией. Основная идея исследования заключается в использовании метода Фурье с последующим приведением спектральной задачи к системе Дирака. Такой подход позволяет получить аналитические выражения для собственных значений и собственных функций рассматриваемого оператора [4,5].

Рассмотрим смешанную задачу для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией вида

$$1. \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \beta \frac{\partial u(1-x,t)}{\partial x} - q(x)u(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0. \quad (1)$$

2. Начальное и граничное условия имеют вид

$$3. \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$4. \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad (3)$$

5. здесь $\beta \neq 0$, $q(x) \in C[0,1]$, функция потенциала обладает симметрией

$$6. \quad q(x) = q(1-x), \quad (4)$$

7. начальная функция удовлетворяет условиям

$$8. \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0. \quad (5)$$

9. Преобразование, $v(x) = 1-x$ является инволюцией, т.к. $v(v(x)) = x$.

Наличие данного преобразования существенно отличает рассматриваемую задачу от классических задач. Для нахождения решения задачи (1)-(5) воспользуемся методом разделения переменных, т.е. решение ищем в виде

$$u(x,t) = y(x) \cdot T(t), \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в уравнение (1), получаем

$$y(x) \cdot T'(t) = \beta y'(1-x) \cdot T(t) - q(x) \cdot y(x) \cdot T(t)$$

Разделяя переменные, получим уравнения

$$T'(t) = \lambda T(t), \quad (7)$$

Решение запишется в виде

$$T(t) = Ce^{\lambda t}, \quad C - const, \quad (8)$$

для функции $y(x)$ получаем спектральную задачу

$$\beta y'(1-x) - q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (9)$$

с граничным условием

$$y(0) = 0, \quad (10)$$

Таким образом, исследование исходной смешанной задачи сводится к изучению спектральной задачи (9)-(10). Основной трудностью является наличие производной в симметричной точке $1-x$, что не позволяет непосредственно применять классические методы спектральной теории. введем новые неизвестные функции

$$z_1(x) = y(x), \quad z_2(x) = y(1-x). \quad (11)$$

После замены (11) спектральная задача (9) приводится к системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Обозначим

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда рассматриваемая система может быть записана в матричной форме

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \quad (12)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Представление (12) является системой Дирака [1]. Так как функция потенциала удовлетворяет условию симметрии (4). Матрица $P(x)$ обладает специальной структурой, что позволяет выполнить диагонализацию матрицы B . Пусть

$$z(x) = Tv(x), \quad (14)$$

где T – невырожденная матрица преобразования. После подстановки (14) система (12) приводится к диагональному виду

$$Dv'(x) + \tilde{P}(x)v(x) = \lambda v(x), \quad (15)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Система распадается на два независимых линейных дифференциальных уравнения первого порядка, интегрирование которых выполняется непосредственно. В результате получаем аналитическое представление общего решения спектральной задачи

$$z(x) = TV(x, \lambda)c, \quad (16)$$

где $V(x, \lambda)$ – определяется через экспоненциальные функции и интегралы от потенциала $q(x)$, а $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ – произвольный постоянный вектор. Таким образом, применение преобразования к системе Дирака позволяет существенно упростить исследование спектральной задачи и подготовить основу для нахождения собственных значений и собственных функций.

Таким образом, применение преобразования к системе Дирака позволяет существенно упростить исследование спектральной задачи и подготовить основу для нахождения собственных значений и собственных функций. После получения общего решения спектральной задачи определим собственные значения рассматриваемого оператора. Для этого воспользуемся граничным условием (10). Подставляя общее решение в граничное условие (10) получаем, что спектр исследуемого оператора является дискретным и определяется формулой

$$\lambda_n = 2\pi n + a, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (17)$$

где

$$a = 2\pi + \int_0^1 q(t) dt.$$

Следовательно, все собственные значения расположены на одинаковом расстоянии друг от друга, а функция потенциала влияет только на величину спектрального сдвига. Значит, $\lambda_n + 1 - \lambda_n = 2\pi$. то есть расстояние между соседними собственными значениями остается постоянным независимо от выбора симметричной функции потенциала $q(x)$.

Подставляя выражение (17) в общее решение спектральной задачи, получаем

$$y_n(x) = p(x)e^{2\pi nxi} - ip(x)e^{2\pi nxi}, \quad (18)$$

где

$$p(x) = u(x)e^{ax},$$

а функция

$$u(x) = e^{i \int_0^x q(t) dt}.$$

определяется потенциалом рассматриваемого оператора. Таким образом, каждая собственная функция представляет собой произведение весовой функции $p(x)$, зависящей от потенциала, и гармонических экспонент.

Полученная система собственных функций образует спектральную систему исследуемой задачи и используется при построении решения смешанной задачи методом Фурье. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия $q(x) \in C[0,1]$, $q(x) = q(1-x)$, а начальная функция удовлетворяет условиям (5). Тогда спектральная задача (9)-(10) обладает счетным множеством собственных значений (17), а соответствующие собственные функции определяются формулой (18).

Рассмотрим простейший случай $q(x) \equiv 0$, тогда $a = 2\pi$. Из формулы (17) получаем $\lambda_n = 2\pi(n+1)$, при этом $u(x) \equiv 1$. Следовательно $p(x) = e^{-2\pi x}$. Собственная функция принимает вид

$$y_n(x) = e^{-2\pi x} (e^{-2\pi nxi} - ie^{2\pi nxi}).$$

Данный пример показывает, что при отсутствии потенциала структура спектра существенно упрощается, а собственные функции приобретают наиболее простой аналитический вид.

Литература

1. Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument. Warsaw: PWN, 1973.
2. Sadybekov M.A., Torebek B.T. Problems for differential equations with involution // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1759. Article 020131.

3. Ruzhansky M., Sadybekov M., Torebek B. About differential operators with involution // Complex Analysis and Operator Theory. 2020. Vol. 14. Article 31.
4. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-posedness of boundary value problems for differential equations with involution // Electronic Journal of Differential Equations. 2015. No. 284. P. 1–15.
5. Levitan B.M., Sargsjan I.S. Introduction to Spectral Theory. Moscow: Nauka, 1970.