ISSN: 2181-3906
2024

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 10 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

MARKOV ZANJIRI VA UNING IJTIMOIY HAYOTDAGI O‘RNI

S. M. Mirzataev
dotsent, Qoraqalpoq davlat universiteti.
O. E. Kamalov
magistrant, Qoraqalpoq davlat universiteti.

https://doi.org/10.5281/zenodo.14003717

Annotatsiya. *Bu maqolada Markov zanjirining asosiy tushunchalari, uning Bernulli sxemasi bilan bog‘liqligi va o‘tish matritsasini o‘rganamiz. Shuningdek, ushbu nazariyaning ijtimoiy hayotdagi ahamiyatini ko‘rib chiqamiz.*

Kalit so‘zlar: *Markov zanjiri, Bernulli sxemasi, bog‘liq jarayonlar, o‘tish matritsasi.*

MARKOV CHAIN AND ITS PLACE IN SOCIAL LIFE

Abstract. *In this article, we will explore the basic concepts of the Markov chain, its relation to the Bernoulli scheme, and the transition matrix. We will also consider the importance of this theory in social life.*

Key words: *Markov chain, Bernoulli scheme, dependent processes, transition matrix.*

ЦЕПЬ МАРКОВА И ЕЕ МЕСТО В ОБЩЕСТВЕННОЙ ЖИЗНИ

Аннотация. *В этой статье мы изучим основные понятия цепи Маркова, ее связь со схемой Бернулли и матрицей перехода. Мы также рассмотрим значение этой теории в общественной жизни.*

Ключевые слова: *цепь Маркова, схема Бернулли, зависимые процессы, матрица переходов.*

Markov zanjiri — tasodifiy jarayonlarning bir turi bo‘lib, u o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi bog‘lanishni o‘rganishga yordam beradi. Ushbu tushuncha 20-asrning boshida rus matematikasi Andrey Markov tomonidan ishlab chiqilgan. Markov zanjirlarining asosiy xususiyati shundaki, kelajakdagi holat, faqat hozirgi holatga bog‘liq bo‘lib, o‘tgan holatlar ta’sir qilmaydi.

Markov zanjirlarini bog‘langan tajribalarning eng sodda ko‘rinishi sifatida ko‘rib chiqamiz. Faraz qilaylik, tajribalar ketma-ket o‘tkazilmoqda va har bir sinov natijasida birgalikda bo‘lmagan $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisalardan faqat bitta hodisa ro‘y berishi mumkin. Ushbu hodisalarning har birining yuz berishi, undan oldingi sinov natijalariga bog‘liqdir. Agar tayin sinovda har bir hodisaning yuz berish ehtimollari, undan oldingi sinov natijasi bilan bir qiymatli aniqlansa, bunday tajribalar ketma-ketligi Markov zanjiri deb ataladi. Bu holda, kelajakdagi hodisaning yuz berishi faqat hozirgi holatga bog‘liq bo‘lib, o‘tgan holatlar ta’sir qilmaydi.

Endi shartli ehtimollarni qo‘sh indeks bilan ifodalash lozim bo‘ladi. Masalan, p_{14} belgi A_4 hodisaning undan oldin sinovda A_1 hodisa yuz berganda amalga oshishining shartli ehtimolini bildiradi.

Sistemaning *i*- holatdan *j*- holatga o‘tish ehtimolini o‘tish ehtimoli deb ataymiz. Oldingi terminlardan foydalanib, p_{ij} ni oldingi sinovda A_i hodisa yuz bergan holda keyingi sinovda A_j hodisa yuz berishining shartli ehtimoli deb ayta olamiz.

Markov zanjiri barcha mumkin bo‘lgan o‘tish ehtimollarining berilishi bilan to‘la tavsiflanadi. Bu ehtimollarni quyidagi *k* – tartibli kvadrat matritsa ko‘rinishda yozish tabiiydir:

ISSN: 2181-3906
2024
International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 10 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{Vmatrix}.$$

bu matritsa o‘tish matritsasi deyiladi.

Markov zanjirini matematik jihatdan ifodalashda o‘tish matritsasi muhim ahamiyatga ega.

O‘tish matritsasi holatlar o‘rtasidagi o‘tish ehtimolliklarini o‘z ichiga oladi. Bu matritsada har bir qatorda hozirgi holat, ustunda esa kelajakdagi holat ko‘rsatilgan. O‘tish matritsasi yordamida holatlar o‘rtasidagi munosabatlar aniq va tezda tahlil qilinishi mumkin.

Markov zanjirini to‘liq tavsiflash uchun birinchi sinovdagi turli natijalarning shartsiz ehtimollari ham berilishi zarur. Biroq ketma-ket sinovlar holatidagi ehtimollarga bu shartsiz ehtimollar emas, balki faqat o‘tish matritsasi orqali belgilangan shartli ehtimollar ta’sir qiladi. Bu holda, kelajakdagi holatlar hozirgi holatga bog‘liq bo‘lib, o‘tish ehtimolliklari orqali ifodalanadi.

Shuning uchun, Markov zanjirining dinamikasi o‘tish matritsasining har bir elementi bilan belgilangan shartli ehtimolliklar asosida yuzaga keladi.

Birinchi sinovdagi natijalarning shartsiz ehtimolliklaridan iborat $B_0 = \begin{pmatrix} b_{01} \\ b_{02} \\ b_{03} \end{pmatrix}$ vertikal matritsani kiritamiz

O‘tish matritsasining elementlari qanoatlantirishi zarur bo‘lgan shartlarni osongina aniqlash mumkin. Avvalo, bu elementlarning hammasi

$$0 \le p_{ij} \le 1 \tag{1}$$

tengsizliklarni qanoatlantirishi zarurligi ravshan. So‘ngra $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisalar har bir sinovda to‘la gruppa tashkil qilgani sababli matritsaning istalgan satridagi elementlar yig‘indisi 1 ga teng bo‘lishi lozim:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \ (i=1,\ 2,\ \dots,k) \tag{2}$$

aksincha, elementlari (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday matritsa biror Markov zanjirining o‘tish matritsasi bo‘la oladi.

Markov zanjirida har bir sinovda hosil bo‘ladigan shartsiz ehtimolliklarni topamiz.

$$\begin{aligned} B_1 &= PB_0 \\ B_2 &= PB_1 = PPB_0 = P^2B_0 \\ B_3 &= PB_2 = PPPB_0 = P^3B_0 \\ B_4 &= PB_3 = PPPPB_0 = P^4B_0 \\ B_n &= PB_{n-1} = PP\dots PB_0 = P^{n-1}B_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Sinovlar soni ortishi bilan P^n o‘tish matritsasi elementlari o‘zgarmas songa yaqinlasha boradi. Buni ushbu teoremada ko‘rish mumkin.

Ehtimolliklar limiti haqida Markov teoremasi

Markov teoremasi ehtimolliklar nazariyasida muhim rol o'ynaydi va u Markov zanjirlari va ularning konvergensiyasini o'rganish uchun qo'llaniladi. Ushbu teorema asosan Markov zanjirining uzoq muddatli xulq-atvorini tasvirlaydi

Markov Teoremasi

Markov teoremasi shuni ko'rsatadiki, agar $\{X_n\}$ Markov zanjiri bo'lsa va u vaqt o'tishi bilan barqaror holatga kirsa, unda holat ehtimolliklari $P(X_n = i)$ n o'sib borishi bilan biror bir limitga ega bo'ladi.

Limit Ehtimolliklari: Agar $lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \pi_i$ bo'lsa, bunda π_i i-chi holat uchun barqaror holat ehtimolligidir.

Ijtimoiy Hayotdagi O‘rni

Mahsulotlarga qiziqishni o‘rganish va reklama strategiyalarini yaratishda Markov zanjirlarining o‘rni katta. Foydalanuvchilar bir brendni tanlab, keyinchalik boshqa brendga o‘tishi mumkin. Bu jarayonni tahlil qilishda o‘tish matritsasi yordam beradi.

Berilgan masala bo‘yicha Markov zanjirini o‘rganamiz.

Uchtalik do‘konlar uchun har bir do‘kondan keyingi haftada xarid qiluvchilar foizlari ko‘rsatilgan bo`lsin. Buni o‘tish matritsasi yordamida tahlil qilamiz.

O‘tish Matritsasini tuzamiz

1. Do‘konlar:
   - Do‘kon 1
   - Do‘kon 2
   - Do‘kon 3
2. O‘tish ehtimolliklari:

- Do‘kon 1 dan:
  - Do‘kon 1: 0.80
  - Do‘kon 2: 0.10
  - Do‘kon 3: 0.10
- Do‘kon 2 dan:
  - Do‘kon 1: 0.20
  - Do‘kon 2: 0.70
  - Do‘kon 3: 0.10
- Do‘kon 3 dan:
  - Do‘kon 1: 0.10
  - Do‘kon 2: 0.30
  - Do‘kon 3: 0.60

Bu ehtimolliklarni o‘tish matritsasiga joylashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} 0.80 & 0.10 & 0.10 \\ 0.20 & 0.70 & 0.10 \\ 0.10 & 0.30 & 0.60 \end{pmatrix}$$

Boshlang‘ich holat

Berilgan xarid qiluvchilar soni:

- Do‘kon 1: 160
- Do‘kon 2: 200
- Do‘kon 3: 140

Ularni vektor shaklida yozamiz:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 160 \\ 200 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Bir haftadan keyin (S_1)

Bir haftadan keyin xarid qiluvchilar sonini hisoblash uchun o‘tish matritsasini boshlang‘ich holat vektoriga ko‘paytiramiz:

$$S_1 = P \cdot S_0$$

Hisoblaymiz:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.10 & 0.10 \\ 0.20 & 0.70 & 0.10 \\ 0.10 & 0.30 & 0.60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 160 \\ 200 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Hisob-kitobni o‘tkazamiz:

1. Do‘kon 1:

$0.80 \times 160 + 0.10 \times 200 + 0.10 \times 140 = 128 + 20 + 14 = 162$

2. Do‘kon 2:

$0.20 \times 160 + 0.70 \times 200 + 0.10 \times 140 = 32 + 140 + 14 = 186$

3. Do‘kon 3:

$0.10 \times 160 + 0.30 \times 200 + 0.60 \times 140 = 16 + 60 + 84 = 160$

Shunday qilib, bir haftadan keyin xarid qiluvchilar soni:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 162 \\ 186 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Ikki haftadan keyin (S_2)

Endi esa S_1 ni yana P matritsasi bilan ko‘paytiramiz:

$$S_2 = P \cdot S_1$$

Hisoblaymiz:

1. Do‘kon 1:

$0.80 \times 162 + 0.10 \times 186 + 0.10 \times 160 = 129.6 + 18.6 + 16 = 164.2$

2. Do‘kon 2:

$0.20 \times 162 + 0.70 \times 186 + 0.10 \times 160 = 32.4 + 130.2 + 16 = 178.6$

3. Do‘kon 3:

$0.10 \times 162 + 0.30 \times 186 + 0.60 \times 160 = 16.2 + 55.8 + 96 = 168$

Shunday qilib, ikki haftadan keyin xarid qiluvchilar soni:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 164.2 \\ 178.6 \\ 168 \end{pmatrix}$$

Ko‘p haftalardan keyin (S_t)

Agar ko‘p haftalardan keyin do‘konlar tashrif buyuruvchilar sonini aniqlamoqchi bo‘lsak, bu jarayonni davom ettirishimiz kerak. Odatda, muayyan bir paytda do‘konlar soni barqaror holatga keladi.

Bu jarayonni davom ettirish uchun, S_2 natijalarini S_3 ni hisoblashda yana P bilan ko‘paytiramiz. Ushbu jarayonni istalgan darajada davom ettirish mumkin, lekin ko‘p holatlarda bu holat barqaror bo‘lishi kutiladi:

$$S_t = P^t \cdot S_0$$

Bu yerda (t) — hafta soni. Har bir yangi natijani hisoblash uchun yuqoridagi usullarni qo‘llaymiz. Har bir natijadan keyin xarid qiluvchilar soni qanday o‘zgarishini ko‘rishimiz mumkin.

Ushbu jarayonni davom ettirish orqali do‘konlarga tashrif buyuruvchilar sonining barqaror holatga yetishishini tahlil qilish mumkin.

Quyida Markov zanjirlarini hisoblash uchun Python dasturi keltirilgan. Ushbu dastur berilgan o‘tish matritsasi va boshlang‘ich holatga asoslanib xarid qiluvchilar sonini hisoblaydi.

```
import numpy as np
# O‘tish matritsasini tuzish
P = np.array([
    [0.80, 0.10, 0.10],
    [0.20, 0.70, 0.10],
    [0.10, 0.30, 0.60]
])

# Boshlang‘ich holat
S_0 = np.array([160, 200, 140])

def calculate_visitors(P, S_0, weeks):
    S = S_0
    results = [S]

    for _ in range(weeks):
        S = np.dot(P, S)
        results.append(S)

    return results

# Bir va ikki haftadan keyin tashrif buyuruvchilar sonini hisoblash
results = calculate_visitors(P, S_0, 2)

# Natijalarni chiqarish
for i, S in enumerate(results):
    print(f"Hafta {i}: {S}")

# Ko‘p haftalar uchun barqaror holatni hisoblash
steady_state = np.linalg.matrix_power(P, 100).dot(S_0)
print(f"Barqaror holat (100 hafta): {steady_state}")
```

Xulosa qilib aytganda, o‘rganilgan adabiyotlar va tajribalar tahliliga asoslangan holda, ushbu maqolada hayotimizning o‘zaro bog‘liq hodisalardan iboratligi ko‘rsatilgan. Markov zanjiridan foydalanish orqali, ushbu hodisalar asosida kelajakda qanday jarayonlar sodir bo‘lishini prognoz qilish imkoniyati mavjud.

Ushbu jarayon misollar yordamida yoritilgan bo‘lib, keltirilgan misollar mavzuning tushunarli bo‘lishini ta’minlaydi.

Bog‘liqli tajribalar uchun Markov zanjirining biologiyadan iqtisodgacha bo‘lgan sohalarda qo‘llanilishi, kelajakdagi hodisalar to‘g‘risida maksimal aniqlik bilan fikr bildirishga yordam beradi. Shuning uchun, mazkur mavzu doirasida ilmiy tadqiqot ishlarini yo‘lga qo‘yish katta ahamiyatga ega.

REFERENCES

1. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika: o‘quv qo‘llanma/ A.A.Abdushukurov [va boshq.]. - T.: «Tafakkur Bo‘stoni», 2015. —416 b.
2. Sh.Q.Formanov. Ehtimolliklar nazariyasi. Universitetlar va pedagogika oliy ta’lim muassasalari talabalari uchun darslik. Toshkent, “Universitet”, 2014.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику: Учебник. М., Издательство ЛКИ, 2010. 600 с.
4. Боровков А. А. Теория вероятностей. - М.: Либроком. 2009. 656 с