ISSN: 2181-3906
2024

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 7 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

# ISSIQLIK ALMASHINUVI SOHASI ICHIDAGI NUQTAVIY ISSIQLIK MANBALARI BILAN BOG‘LIQ MASALALARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA YECHISH USULINI ISHLAB CHIQISH

**Eshmurodov Mas’udjon Xikmatillayevich**
Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti, 140147, Samarqand, Uzbekistan.
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0005-0667-8116
masudeshmurodov@samdaqu.edu.uz, +998933501484.
*https://doi.org/10.5281/zenodo.13243020*

***Annotatsiya.*** *To‘g‘ri chiziqlar va oddiy quvish usullaridan birgalikda foydalanib, parabolik tenglama asosida ikki o‘lchovli masalalarning ma’lum bir sinfidan kelib chiqadigan chekli ayirmali tenglamalar sistemasini yechishning aniq analitik usuli ishlab chiqildi. Bu sinfga Dekart koordinatalarining birida birinchi jinsli chegaraviy shartlarning va boshqa koordinatada uch jinsli shartlarning ixtiyoriy kombinatsiyasini berish hollariga taalluqli.*

*Harakatlanuvchi elementlari bo‘lgan yuqori haroratli va nuqtaviy issiqlik manbalarining issiqlik uzatishini jadallash bo‘yicha bir qator masalalar yechildi.*

*Manbaning to‘g‘ri chiziqli va aylanma harakati uchun sinovdan o‘tgan, ixtiyoriy trayektoriya bo‘ylab harakatlanuvchi nuqtaviy manbani sonli amalga oshirish uchun usul ishlab chiqildi.*

***Kalit so‘z:*** *Issiqlik manbasi, harorat, izoterma, chegara, muhitning zichligi, nuqtaviy manba.*

# DEVELOPMENT OF THE METHOD OF MATHEMATICAL MODELING AND SOLUTION OF PROBLEMS RELATED TO POINT HEAT SOURCES IN THE FIELD OF HEAT EXCHANGE

***Abstract.*** *An exact analytical method for solving a system of finite-difference equations arising from a certain class of two-dimensional problems based on the parabolic equation was developed using straight lines and simple pursuit methods together. This applies to cases where the class is given an arbitrary combination of first-order boundary conditions in one of the Cartesian coordinates and three-order conditions in the other coordinate.*

*A number of issues related to acceleration of heat transfer of high-temperature and point heat sources with moving elements have been solved.*

*A method is developed for the numerical implementation of a point source moving along an arbitrary trajectory, tested for rectilinear and rotational motion of the source.*

***Key word:*** *Heat source, temperature, isotherm, limit, density of medium, point source.*

# РАЗРАБОТКА МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ТОЧЕЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА В ОБЛАСТИ ТЕПЛООБМЕНА

***Аннотация.*** *Совместно используя прямые линии и методы простого преследования, разработан точный аналитический метод решения системы конечно-разностных уравнений, возникающих из определенного класса двумерных задач, основанный на параболическом уравнении. Это относится к случаям, когда классу задана произвольная комбинация граничных условий первого порядка по одной из декартовых координат и условий третьего порядка по другой координате.*

*Решен ряд вопросов, связанных с ускорением теплоотдачи высокотемпературных и точечных источников тепла с подвижными элементами.*

*Разработан метод численной реализации точечного источника, движущегося по произвольной траектории, проверенный на прямолинейном и вращательном движении источника.*

***Ключевые слова:*** *Источник тепла, температура, изотерма, предел, плотность среды, точечный источник.*

**KIRISH:** Nuqtaviy manba yoki aniq uzluksiz qismlar (kesmalar)dagi manbalar bilan bog‘liq masalalarni analitik yechish yetarlicha mashaqqatli ishdir.

Ish [1]da elementar uchastka bo‘ylab real gazning quvur orqali tashishning stasionar masalalariga yo‘l-yo‘lakay gaz olinish holida ayrim yechimlar keltirilgan. Bu holda massa saqlanish tenglamasining o‘ng tomonida bu elementlar Dirakning delta funksiyasi va Hevisaydning zinapoya funksiyasi yordamida ifodalangan. Yuqorida aytib o‘tilgan ishda bunday masalalarni hal qilish uchun Furyening sinus va kosinuslar almashtirishlari qo‘llaniladi.

**ADABIYOTLAR TAHLILI VA USULLAR.** Ushbu maqola doirasida issiqlik almashinuvi hududida harakatlanadigan nuqtaviy manba holini ko‘rib chiqamiz. Issiqlikning nuqtaviy manbai boshqa issiqlik manbalari yoki oqimlari bo‘lmaganda tekis berilgan harorat taqsimoti bilan chegaralanmagan tekislikda issiqlikning doiraviy taqsimlanishiga olib keladi. Bunda uzatiladigan issiqlikning intensivligi masofa bo‘yicha kvadratik qonunga muvofiq ($\approx r^{-2}$) kamayadi.

**MUHOKAMA VA XULOSA:** Agar jarayon stasionar bo‘lmasa, shu jumladan issiqlik manbalarining quvvati vaqtga bog‘liq bo‘lsa, masala umuman murakkablashadi. Ammo harakatlanuvchi manba bilan bog‘liq masalalar ilgari ko‘rib chiqilmagan.

**NATIJA:** Agar hisoblash sohasi uch o‘lchamli bo‘lsa va boshqa bir jinslimasliklar bo‘lmasa, u holda sferik sirtlardan iborat izotermalar kuzatiladi, issiqlik oqimining masofa bo‘yicha tushishi uchinchi tartib ($\approx r^{-3}$)ga ega.

**KIRISH**

Ikki yoki undan ortiq issiqlik manbalari mavjud bo‘lganda kompleks o‘zgaruvchining funksiyalari yordamida elektrostatika bo‘yicha fizika kursida o‘rganilganidek, maydonlarning birlashishi va o‘zaro ta’sirini (interferensiyasini) kuzatish mumkin. Qarama-qarshi ishorali ikkita zaryad yetarlicha yaqin joylashganda dipolning elektrostatik maydoni masalasi yanada ko‘rgazmaliroq bo‘ladi.

**Masalaning qo‘yilishi**. $\rho c q(t)$ issiqlik chiqaruvchi manba (bu yerda $\rho, c$ – issiqlik o‘tkazuvchi muhitning zichligi va issiqlik sig‘imi) $(x^0(t),\ y^0(t))$ trayektoriya bo‘ylab bir jinsli boshlang‘ich haroratga ega bo‘lgan $1\times1$ kvadrat maydon bo‘ylab harakatlanadi.

1. Mohamed M. Mousa. Efficient numerical scheme based on the method of lines for the shallow water equations // Journal of Ocean Engineering and Science, 2018. № 3, – P. 303-309.

Agar $x=0$ va $x=1$ chegaralardagi harorat o‘zgarmas bo‘lib qolsa va $y=0$ va $y=1$ chegarada issiqlikdan izolyatsiya qilingan holda issiqlik almashinuv jarayonini o‘rganish talab etiladi. Manbaning dastlabki koordinatasi – $(x_0^0,\, y_0^0)$.

Haroratning boshlang‘ich taqsimoti $T(x,y,0)=T_0(x,y)$, $x$ bo‘yicha chegaraviy shartlar: $T(0,y,t)=T(1,y,t)=0$, $y$ bo‘yicha – $\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y}=\frac{\partial T(x,1,t)}{\partial y}=0.$ Harakatlanuvchi manbani hisobga olgan holda, ikki o‘lchovli jismning issiqlik holati quyidagi tenglama bilan tavsiflanadi:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\delta\left[x_0(t),\, y_0(t)\right]q(t).$$

Ushbu masalaning barcha elementlari diskret koordinatalarda amalga oshirildi (bundan Dirak delta funksiyasi mustasno) va manbaning koordinatasi uzluksiz va parametrik shaklda berildi.

Ikki turdagi trayektoriyalar uchun yechim algoritmini tuzamiz.

Birinchi holda $q(t)=const$ nuqta manbasining to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $U$ o‘zgarmas tezlik bilan ilgarilanma harakati ko‘rib chiqiladi. Uning dastlabki joylashuvini $(x_0^0; y_0^0)=(0.5;\,0)$ deb olsak, uning harakat qonuni $x_0(t)=0.5,\quad y_0(t)=Ut$ tenglamalar bilan tavsiflanadi.

Ikkinchi holda, manba trayektoriyasi aylanadan iborat.

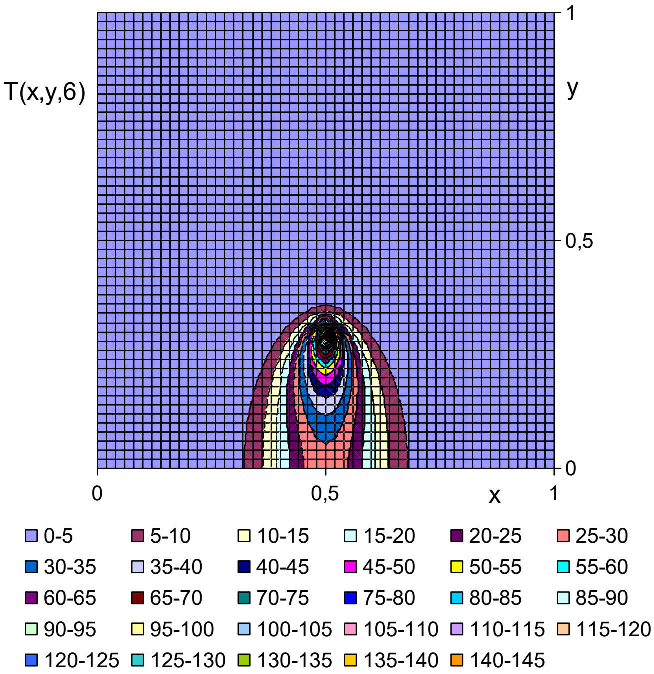
**Issiqlik manbasining to‘g‘ri chiziqli harakati holi.** Ushbu masalaning qabul qilingan shartlariga ko‘ra $x_0(t)=h_x(N_x+1)/2=const,$ bundan tashqari, $(N_X+1)/2-$butun son. $y_0(t)$ ni diskretlashtirish $j_0$ eng yaqin diskret koordinata bilan almashtirish orqali amalga oshiriladi, ya’ni

$$j_0=\begin{cases}\{Ut/h_y\}, & \text{агар}\quad 0\le \dfrac{Ut}{h_y}-j_0\le 0.5,\\[2ex] \{Ut/h_y\}+1, & \text{агар}\quad 0.5\le \dfrac{Ut}{h_y}-j<1.\end{cases}$$

Bu yerda {a} – a ning butun qismi. Ushbu funksiyani kompyuterda bajarish $a$ ni $j_0$ butun songacha yaxlitlash orqali amalga oshiriladi.

Bu masalaga boshqa nuqtai nazardan qarash mumkin. Masalan, qo‘zg‘almas issiqlik manbai $U$ tezlikka ega bir jinsli oqim maydonida joylashgan. U holda issiqlik uzatish tenglamasida $U$ doimiy koeffisiyentga ega bo‘lgan konvektiv had hosil bo‘ladi va bu had tufayli masalaning (sonli) yechimi murakkablashadi. $U$ tezlikning yo‘nalishi ordinata o‘qiga nisbatan ma’lum bir burchakni tashkil etadi, tezlikning o‘zi esa vaqt funksiyasi bo‘lgan variantlarni ham ko‘rib chiqish mumkin.

ISSN: 2181-3906
2024
International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 7 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ




1-rasm. $q=1000$ issiqlik manbasini $U=0.05\ m/sek$, tezlik bilan $x_0=0.5,\ y_0=Ut$ dagi harakatlantirish natijasida olingan $t=6$ vaqtdagi izotermalar.

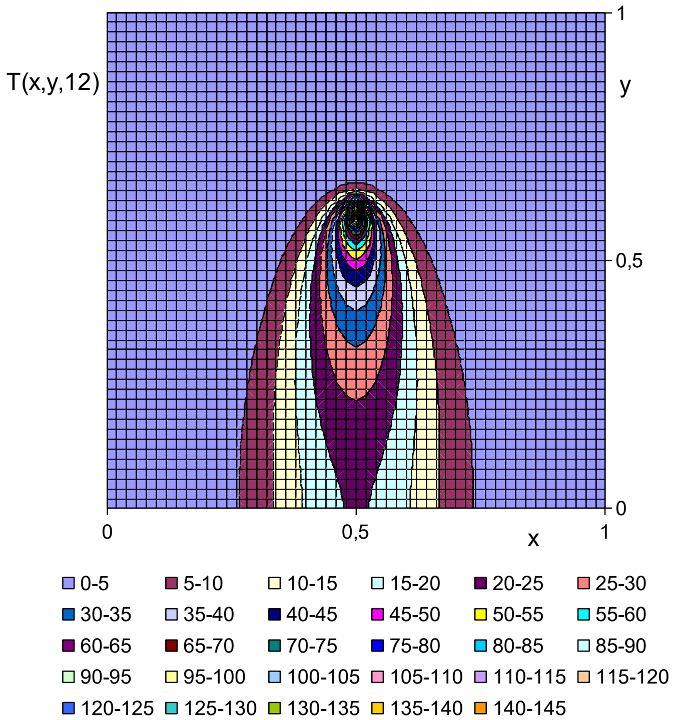
$l_x=1,\ l_y=1,\ N_x=N_y=49,\quad \tau=0.02,\quad a^2=0.001\ m^2/c,\quad U=0.05\ m/sek,$ $\theta_0=\theta_l=1,\quad \xi_0=\xi_l=0,\quad \mu_0(y,t)=\mu_l(y,t)=0,\quad \varphi(x,t)=\psi(x,t)=0$ hol uchun hisoblash natijalarini keltiramiz. Issiqlik chiqarish intensivligi $q=1000.0$ ni tashkil etdi.

Natijalar har 100 vaqt qadamida saqlandi va hisob 1001-vaqt qadamigacha davom ettirildi. Natijalarni Excel muhitida intervali 5 bo‘lgan izotermalar ko‘rinishida tasvirladik.

4.10-4.12-rasmlarda $t=6$, 12 va 18 vaqt momentlari uchun izotermalar keltirilgan. Ularda $y=0$ dagi $\partial T/\partial y=0$ shartning sezilarli roli bor, chunki chegaralarda izotermalar abssissa o‘qiga deyarli perpendikulyar.

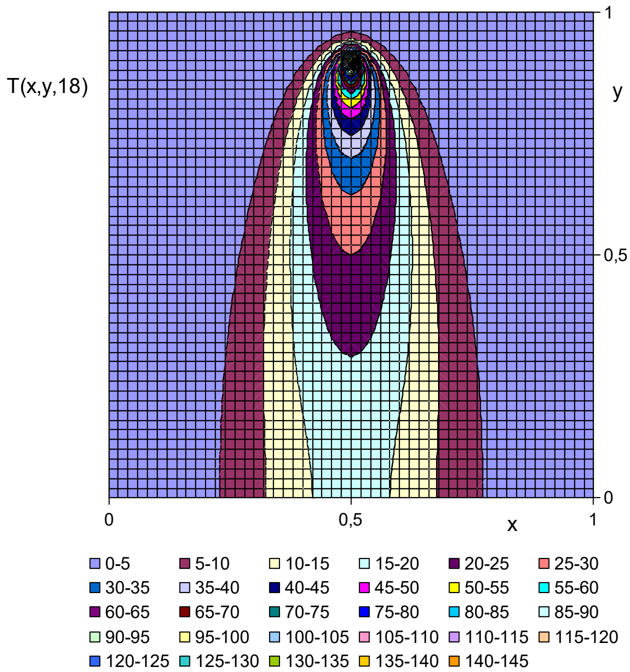
Natijalar $t=0$ va $t=20$ da manba atrofida juda zich bo‘lib chiqdi, bunga sabab $y=0$ va $y=1$ dagi $\partial T/\partial y=0$ shart hisoblanadi.

ISSN: 2181-3906
2024
International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 7 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ




2-rasm. $t = 12$ vaqt momenti izotermlari $l_x = 1,\ \ l_y = 1,\ N_x = N_y = 49,$

$$\tau = 0.02,\ \ a^2 = 0.001\, m^2 / sek,\ U = 0.05\ m / sek,\ \theta_0 = \theta_l = 1,\ \ T_0 = T_l = 0,$$
$$q = 1000.0$$




3-rasm. $t = 18$ vaqt momenti izotermalari. Ma’lumotlar 2-rasmda

Yuqorida ta’kidlab o‘tilganidek, shuningdek ishlab chiqilgan dasturda keltirilgan algoritmdagi tuzatishlar parametrik shaklda berilgan issiqlik manbai trayektoriyasini ko‘rsatishga tegishli. Quyida biz yetarlicha kichik vaqt qadami bilan ishonchli natijalar beradigan variantni taqdim etamiz.

Ikkinchi holda, issiqlik manbasining trayektoriyasi $R = 0.25$ radiusli va markazi $(0.5; 0.5)$ nuqtada bo‘lgan aylanadan iborat bo‘ladi:

$$x_0(t) = 0.5 + 0.25\cos\pi t, \quad y_0(t) = 0.5 + 0.25\sin\pi t.$$

Jarayon davriy xarakterga ega: ikkiga teng vaqt davomida manba to‘liq aylana hosil qiladi. Nuqtaviy manbaning chiziqli aylanma tezligi $\pi$ ga teng. $t = 0$ da u $(3/4;\ 1/4)$, $t = 1/2$ da $(1/2;\ 3/4)$, $t = 1$ da - $(1/4;\ 1/4)$, $t = 3/4$ da $(1/2;\ 1/4)$ nuqtada bo‘ladi $t = 2$ da $(3/4;\ 1/4)$ boshlang‘ich nuqtaga qaytadi va hokazo.

Dekart koordinatalarida manba trayektoriyasi $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}.$ aylana tenglamasi bilan tavsiflanadi. Kamdan kam hollarda manba trayektoriyasi $h_x$ va $h_y$ qadamli to‘rning $(i, j)$ tuguni bilan ustma-ust tushadi. Qadamlarni maydalash bu yerda yordam bermaydi.

Dasturda biz hisob-kitoblarda manba nuqtasiga yaqin bo‘lgan tugunni manba joylashuv nuqtasi sifatida oldik. Agar bunday tugunlar bir nechta bo‘lsa, u holda trayektoriya yo‘nalishiga yaqin tugun tanlandi.

Shunday qilib, tenglama quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q(t)\,\delta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos\pi t, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin\pi t\right).$$

Bunday holda, chekli-ayirmali tenglamaning o‘ng qismida $f_{i,j}^n = \delta(i_0^0, j_0^n)\, q^n$ had hosil bo‘ladi. $i_0^n$ va $j_0^n$ qiymatlarni, masalan, quyidagi tarzda aniqlash mumkin:

$$i_1 = \left\{\frac{x_0}{h_x}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos\pi t\right) / h_x\right\}, \quad j_1 = \left\{\frac{y_0}{h_y}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin\pi t\right) / h_y\right\}.$$

Manba joylashgan nuqtadan to‘r to‘g‘ri to‘rtburchak uchlarigacha bo‘lgan masofalar kvadratlarini hisoblaymiz:

$$r_1^2 = (x_0 - i_1 h_x) + (y_1 - j_1 h_y)^2, \quad r_2^2 = (x_0 - (i_1 + 1)h_x)^2 + (y_1 - j_1 h_y)^2,$$

$$r_3^2 = (x_0 - (i_1 + 1)h_x)^2 + (y_1 - (j_1 + 1)h_y)^2, \quad r_4^2 = (x_1 - i_1 h_x)^2 + (y_1 - (j_1 + 1)h_y)^2.$$

Agar hisoblangan masofalar kvadratlarining eng kichigi $r_1^2$ bo‘lsa, u holda manba joylashuvi tugunlari uchun $i_0 = i_1,\ j_0 = j_1$ diskret koordinatalarni qabul qilamiz; agar $r_2^2$ bo‘lsa $i_0 = i_1 + 1,\ j_0 = j_1;$ - agar $r_3^2$ bo‘lsa $i_1 = i_1 + 1,\ j_1 = j_1 + 1;$ va agar $r_4^2$ bo‘lsa $i_0 = i_1,\ j_0 = j_1 + 1$ deb qabul qilamiz.

Bu usul $x_0 = x_0(t),\ y_0 = y_0(t)$ parametrik shaklda berilgan ixtiyoriy uzluksiz trayektoriyali manbaga qo‘llanilishi mumkin. Manbalar sonini ko‘paytirish mumkin. Trayektoriyalarning xususiyatiga qarab, sonli integrallash qadamlarini tanlash kerak bo‘ladi.

Batafsil illyustrativ rasmlar $N_x = N_y = 49,\quad a^2 = 0.100\ m^2 / sek,\ \tau = 0.002,\ \ q = 10000.0$ da olindi. Hisoblashlar vaqt bo‘yicha 2001-qadamgacha olib borildi. Natijalar har 100 vaqt qadamda saqlandi. Izotermalarni vizualizatsiya qilish Excel muhitida har 5 darajadan keyin amalga oshirildi.

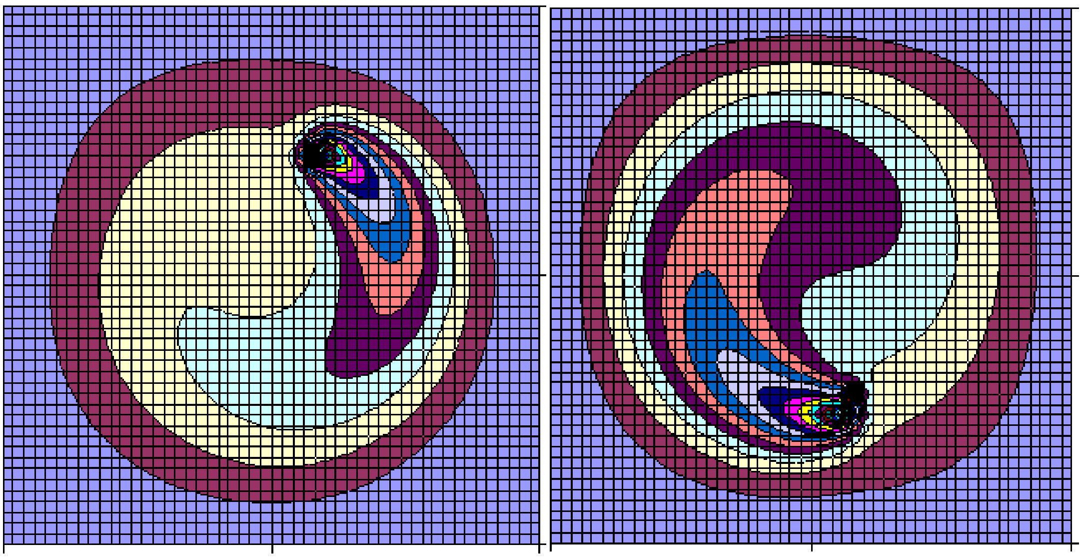
**NATIJA**

4-rasmda turli vaqtlar uchun olingan izotermalar tasvirlangan. Jadvalda bu vaqtlar va vaqtga bog‘liq ravishda manbaning joylashuvi koordinatalari ko‘rsatilgan.

4.1-jadval

Izotermalar shaklda ko‘rsatilgan 4-shaklda keltirilgan issiqlik manbasini hisoblash vaqti va koordinatalari

| Vaqt | Manba abssissasi | Manba ordinatasi |
|---|---|---|
| 0.4 | 0.57725 | 0,73776 |
| 0.8 | 0.29775 | 0,64695 |
| 1.4 | 0.42275 | 0,26224 |
| 2.0 | 0.75000 | 0,50000 |
| 2.4 | 0.57725 | 0,73776 |
| 4.6 | 0.57725 | 0,26224 |



5-rasm. Issiqlik manbaining $x_0(t) = 0.5 + 0.25\cos\pi t,\ y_0(t) = 0.5 + 0.25\sin\pi t$ qonun bo‘yicha harakatida hosil bo‘lgan izotermalar. $a^2 = 0.100\ m^2 / sek,\ \tau = 0.002,\ \ q = 10000.0$

**XULOSA**

Qo‘llanilgan approksimatsiya formulalari aniqlikning fazoviy koordinatalar bo‘yicha ikkinchi tartibini va vaqt bo‘yicha birinchi tartibini ta’minlaydi. Vaqt bo‘yicha aniqlik tartibini vaqt bo‘yicha markaziy sxema yordamida oshirish mumkin.

Usul chegaraviy shartlarda trigonometrik va uzilishga ega funksiyalar ishtirok etgan o‘rnatish masalalarida sinovdan o‘tkazildi va o‘rnatishning $10^{-5}$ gacha aniqligiga erishildi.

**REFERENCES**

1. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло– и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
3. Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально–разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.
4. Фаддеева В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. –Тр. МИ АН СССР, 1949, том 28. – С. 73–103. (Из Общероссийского математического портала Math–Net).
5. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз,1963.
6. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре (изд. 4–е дополн.). – М.: Наука, 1971. – 272 с.
7. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. – М.: Наука, 1972. – 688 с.
8. Khujaev, J Khujaev, M Eshmurodov and K Shaimov. Differential-difference method to solve problems of hydrodynamics. Journal of Physics: Conference Series 1333. 2019. -P. 1-8.
9. Khujaev I, Khujaev J. Modification of the method of lines for solving onedimensional equation of parabolic type under the boundary conditions of second and first genera // International Scientific Journal: Theoretical & Applied Science, Philadelphia, USA. – 2018. – Vol. 58. – Issue 2. – Pp. 144-153. – DOI: https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.02.58.31.
10. Хужаев И.К., Хужаев Ж.И., Равшанов З.Н. Численно-аналитические методы решения задач на собственные числа и вектора для метода прямых на прямоугольных областях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2017. – №4(10). – С. 76-83.
11. Шаимов К.М., Эшмуродов М.Х., Хужаев И.К. Дифференциально-разностный метод для двумерных линейных задач теплопередачи // Научный вестник. СамГУ – 2020, – №1(121). – С.78-87(01.00.00.; № 2).
12. M Kh Eshmurodov, K.M. Shaimov, I Khujaev and J Khujaev Method of lines for solving linear equations of mathematical physics with the third and first types boundary conditions. Journal of Physics: Conference Series 2131 (2021) 032041, doi:10.1088/1742-6596/2131/3/032041
13. K. M. Shaimov, M. Kh. Eshmurodov, I. Khujaev and Zh. I. Khujaev The Method of Lines for Solving Equations of Mathematical Physics with Boundary Conditions of the First and

Third Types // The method of lines for solving equations of mathematical physics with boundary conditions of the first and third types, Cite as: AIP Conference Proceedings 2612, 030028 (2023); https://doi.org/10.1063/5.0124614, Published Online: 15 March 2023