ISSN: 2181-3906 2024

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 7 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

IMPULS TÁSIRINE IYE SIZIQLI BIRTEKLI EMES DIFFERENCIALLIQ TEŃLEMELER SISTEMASI USHIN ÚSH TOCHKALI SHEGARALIQ MÁSELELERDI SHESHIWDIŃ IZBE IZ JUWIQLASIWLAR USILI

Qurbanbaev Ó.O.
Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, docent
Djakaeva K.D.
Nókis innovatsion instituti, PhD.
Askarova D.B
Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, stajyor oqıtıwshı

https://doi.org/10.5281/zenodo.13137284

Annotaciya. Maqalada impulslıq tásirge iye sızıqlı birtekli emes differenciallıq teńlemeler sisteması ushın úsh tochkalı shegaralıq máseleler qarastırılıp, sheshimdi A.M.Samoylenkonıń sanlı analitikalıq usılı járdeminde juwıq tabıw máselesi qarastırıladı.

Tayanısh sózler: Sızıqlı differenciallıq teńlemeler sisteması, úsh tochkalı shegaralıq másele, impulslıq tásir, juwıq sheshim, dál sheshim.

A SEQUENTIAL APPROXIMATION METHOD FOR SOLVING THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A SYSTEM OF LINEAR NON-HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE EFFECTS

Abstract . *In the article, three-point boundary value problems for a system of linear non-homogeneous differential equations with impulse effect are considered, the problem of finding the solution using the numerical analytical method of A.M. Samoilenka is considered.*

Key words: *System of linear differential equations, three-point boundary value problem, impulse effect, approximate solution, exact solution*

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Аннотация. *В статье рассмотрены трехточечные краевые задачи для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, рассмотрена задача поиска решения численно-аналитическим методом А.М. Самойленки.*

Ключевые слова: *Система линейных дифференциальных уравнений, трехточечная краевая задача, импульсный эффект, приближенное решение, точное решение.*

Teoriyalıq fizikanıń, kvantlıq elektronikanıń, mexanikanıń, raketalıq hám elektronlı texnikanıń hám ilimniń basqada tarawlarınıń kóplegen máselelerinde impulslıq tásirge iye ádettegi differenciallıq teńlemeler sisteması ushın shegaralıq máselelerdi úyreniw zárúrligi payda bolıp, bul teoriyanıń tiykarǵı sorawların izertlewde kóplegen jumıslar islenbekte. Ásirese keyingi dáwirleri tez pát penen rawajlanǵan impulslıq tásirge iye differenciallıq teńlemeler teoriyasınıń tiykarǵı mashqalaların izertlewge A.M.Samoylenko, sonda-aq taǵı basqa ullı matematiklerdiń ilimiy jumısları baǵıshlanǵan [1,2].

Bul maqalada impulslıq tásirge iye birinshi tártipli ádettegi sızıqlı birtekli emes differenciallıq teńlemeler sisteması ushın úsh tochkalı shegaralıq máseleler qarastırılıp, sheshimdi dúziw usılları bayan etiledi.

Meyli endi joqarıda qarastırǵan usıldı birtekli emes sızıqlı differenciallıq teńlemeler sisteması jaǵdayında qarastırayıq, yaǵnıy Samoylenkonıń sanlı analitikalıq usılın impulslıq tásirge iye sızıqlı birtekli emes

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x+f(t),\ \ t\neq\tau_i,\ \ i=1,2,...,N, \qquad (1)$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i}=x(\tau_i+0)-x(\tau_i-0)=d_i \qquad (2)$$

differenciallıq teńlemeler sisteması ushın úsh tochkalı

$$Ax(0)+Bx(t_1)+Cx(T)=d \qquad (3)$$

shegaralıq shàrtti qanaatlandıratuǵın sheshimdi tabıw màselesine qollanayıq, bul jerde x hám $d,d_i,\, i=1,2,...,n$ ler E_n Evklid keńisliginiń tochkaları, $P(t)$ bolsa $[0,T]$ aralıǵında ùziliksiz bolǵan n òlshemli kvadrat matrica, A,B hám C lar turaqlı n òlshemli kvadrat matricalar, sonıń menen birge $\det(A+B+C)\neq 0$ hàm $\tau_i\in(0,T)$ bolıp, bul tochkalar bir-birinen teńdey qashıqlıqta jaylasqan tochkalar, yaǵnıy $\tau_{i+1}-\tau_i=h=const.$ Al $f(t)$ funkciyası $[0,T]$ aralıqta ùziliksiz bolǵan vector funkciya.

Meyli $P(t)$ matricası ushın

$$P=\max_{t\in[0,T]}|P(t)|$$

bolsın hàm $Q=\dfrac{T}{\pi}P$ matricasınıń menshikli mànisleri absolyut shaması boyınsha birden kishi bolsın, yaǵnıy

$$|\lambda(Q)|<1$$

shàrtler orınlı bolsın. Bul jaǵdayda Dirak hàm Xevisayda funkciyaları arasındaǵı

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(s)ds=X(t)$$

qatnastı esapqa ala otırıp, berilgen (1),(2) impulslıq tàsirge iye sistemanı

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x+f(t)+\sum_i d_i\delta(t-\tau_i) \qquad (4)$$

tùrinde jazıp alamız hàm bul sistemaǵa x_0 hám x_T parametrleriniń bazı-bir mànislerinde teń kùshli bolǵan

$$x(t,x_0,x_T)=x_0(t,x_0,x_T)+\int_0^t\big[P(s)x(s,x_0,x_T)+f(s)- \qquad (5)$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T \big(P(s)x(s,x_0,x_T)+f(s)\big)ds\Bigg]ds+\sum_{\tau_i<t}d_i-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^N d_i,\ m=0,1,2,\ldots$$

integrallıq teńlemeni qarastıramız, bul jerde

$$x_0=x(0),\ x_T=x(T),\ x_0(t,x_0,x_T)=\left(1-\frac{t}{T}\right)x_0+\frac{t}{T}x_T.$$

Bul integrallıq teńlemeniń sheshimi erikli x_0 hám x_T parametrleriniń bazı bir mánisleri ushın (4) impulslıq tàsirge iye sistemanı qanaatlandıradı.

Endi (5) integrallıq teńlemeni

$$x_{m+1}(t,x_0,x_T)=x_0(t,x_0,x_T)+\int_0^t\Big[P(s)x_m(s,x_0,x_T)+f(s)- \qquad (6)$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T \big(P(s)x_m(s,x_0,x_T)+f(s)\big)ds\Bigg]ds+\sum_{\tau_i<t}d_i-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^N d_i,\ m=0,1,2,\ldots$$

formula boyınsha juwıq sheshemiz.

Egerde (3),(4) shegaralıq máseleniń tek $(m+1)$-juwıqlasıwin tabıw menen sheklenetuǵın bolsaq, onda $x_{m+1}(t,x_0,x_T)$ funkciyası erkli x_0 hám x_T lar ushın

$$\frac{dx_{m+1}}{dt}=P(s)x_m+f(t)+\sum_i d_i\delta(t-\tau_i)+$$

$$+\frac{1}{T}(x_T-x_0)-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^N d_i-\frac{1}{T}\int_0^T P(s)x_m(s,x_0)ds-\frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds$$

differenciallıq teńlemeler sistemasınıń sheshimi bolǵanlıqtan x_0 hám x_T nı

$$\Delta_m(x_0,x_T)=x_T-x_0-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^N d_i-\frac{1}{T}\int_0^T P(s)x_m(s,x_0)ds$$

vector funkciyasın nolge aylandıratuǵınday etip saylap alamız.

Endi (6) funkciyalar izbe-izliginiń jıynaqlı izbe-izlik ekenligin kórsetemiz, onıń ushın aldıńǵı paragraftaǵıday Koshidiń jıynaqlılıq belgisin paydalanamız:

$$\left|x_1(t,x_0,x_T)-x_0(t,x_0,x_T)\right|\le\left|\int_0^t\left[P(s)x_0(s,x_0,x_T)-\frac{1}{T}\int_0^T P(s)x_0(s,x_0,x_T)ds\right]ds\right|+$$

$$+\left|\int_0^t\left[f(s)-\frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right]ds\right|+\left|\sum_{\tau_i<t}d_i-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^N d_i\right|\le$$

$$\le\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\left|P(s)x_0(s,x_0,x_T)\right|ds+\frac{t}{T}\int_t^T\left|P(s)x_0(s,x_0,x_T)\right|ds+$$

$$+\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{\tau_i<t}|d_i|+\frac{t}{T}\sum_{\tau_i\geq t}|d_i|+\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t|f(s)|ds+\frac{t}{T}\int_t^T|f(s)|ds\leq$$

$$\leq Px_{0T}\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t ds+\frac{t}{T}\int_t^T ds\right]+D\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\sum_{r_i<t}1+\frac{t}{T}\sum_{r_i>t}1\right]+$$

$$+M\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t ds+\frac{t}{T}\int_t^T ds\right]\leq Px_{0T}\alpha_1(t)+\frac{1}{N}D\alpha_1(t)+M\alpha_1(t)=$$

$$=\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\alpha_1(t),$$

bul jerde $M=\max_{t\in[0,T]}|f(t)|$.

Usınday jollar menen (6) dan

$$|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)|\leq\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t P|x_1(s,x_0)-x_0|ds+$$

$$+\frac{t}{T}\int_t^T P|x_1(s,x_0)-x_0|ds\leq P\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\alpha_1(s)ds+\right.$$

$$\left.+\frac{t}{T}\int_t^T\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\alpha_1(s)ds\right]\leq P\left[\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\alpha_2(t)\right]$$

hám usıǵan uqsas

$$|x_3(t,x_0)-x_2(t,x_0)|\leq P^2\left[\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\alpha_3(t)\right]$$

teńsizliklerin alıwǵa boladı. Matematikalıq indukciya boyınsha barlıq $t\in[0,T]$ hám m ler ushın

$$|x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\leq P^m\left[\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\alpha_{m+1}(t)\right]\leq$$

$$\leq P^m\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\frac{T^m}{\pi^m}\tilde{\alpha}_1(t)=Q^m\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\tilde{\alpha}_1(t)$$

boladı. Jıynaqlılıqtıń Koshi belgisi boyınsha

$$|x_{m+j}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|=\sum_{i=1}^{j}|x_{m+i}(t,x_0)-x_{m+i-1}(t,x_0)|\leq \qquad (7)$$

$$\leq\sum_{i=0}^{j}Q^{m+i}\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\tilde{\alpha}_1(t)=Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\left(Px_{0T}+\frac{1}{N}D+M\right)\tilde{\alpha}_1(t)$$

ISSN: 2181-3906
2024
International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 7 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

bolıp, $\lim_{m\to\infty} Q^m = 0$ ekenligin esapqa alsaq, onda (7) den $m \to \infty$ shek ala otırıp $x_m(t, x_0)$ funkciyalar izbe-izliginiń teń òlshemli jıynaqlı izbe-izlik ekenligin kòriwge boladı, yaǵnıy

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0)$$

(20) dan $j \to \infty$ daǵı shek alsaq

$$\left| x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0) \right| \le Q^m (E - Q)^{-1} \left(P x_{0T} + \frac{1}{N} D + M \right) \tilde{\alpha}_1(t) \qquad (8)$$

$m = 1, 2, \dots$ boladı. Endi $x^*(t, x_0)$ funkciyası (1)-(3) impulslıq tàsirge iye shegaralıq màseleniń sheshimi bolıw ushın x_0 hám x_T nı saylap alamız, onıń ushın x_0 hám x_T lardı

$$\Delta_m(x_0, x_T) = x_T - x_0 - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N} d_i - \frac{1}{T} \int_0^T P(s) x^*(s, x_0, x_T) ds$$

hám

$$\varphi(x_0, x_T) = A x_0 + C x_T - \psi(x^*(t, x_0, x_T))$$

vector funkciyalarıń nolge aylanatuǵınday etip alıw kerek boladı, yaǵnıy

$$\begin{cases} \Delta(x_0, x_T) = 0, \\ \varphi(x_0, x_T) = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

algebralıq teńlemeler sistemasınıń kòreni bolatuǵınday etip saylap alamız, bul jerde

$$\psi(x^*(t, x_0, x_T)) = (A + B + C)^{-1} \left[(A + C) d - BA \int_0^{t_1} P(s) x^*(s, x_0, x_T) ds + \right.$$

$$\left. + BC \int_{t_1}^{T} P(s) x^*(s, x_0, x_T) ds \right].$$

Meyli $x_0 = x_0^*$, $x_T = x_T^*$ bul sistemanıń sheshimi bolsın. Onda $x^*(t, x_0^*, x_T^*)$ (1)-(3) impulslıq tàsirge iye shegaralıq màseleniń sheshimi bolıp tabıladı.

Alınǵan nàtiyjelerdı ulıwmalastırıp, tòmendegi teorema menen juwmaqlastırıwǵa boladı.

Teorema. Meyli $P(t)$ matricası hàm $f(t)$ vector funkcıyası $[0, T]$ aralıǵında ùziliksiz bolsın hàm sonıń menen birge $Q = P\dfrac{T}{\pi}$ matricasınıń menshikli mànisleri absolyut shaması boyınsha birden kishi bolsın. Onda (9) nıń sheshimi bolıp tabılatuǵın $x_0 = x_0^*$, $x_T = x_T^*$ ushın (6) funkciyalar izbe-izliginiń $m \to \infty$ daǵı shegi, yaǵnıy $x^*(t, x_0^*, x_T^*)$ funkciyası (1)-(3) impulslıq tàsirge iye sızıqlı shegaralıq màseleniń sheshimi bolıp tabıladı.

Dál sheshim menen juwıq sheshim arasındaǵı qàtelik (8) teńsizlik penen bahalanadı.

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 7 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

REFERENCES

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. –Киев. “Вища школа”, 1987.
2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. –Киев. “Наукова думка”, 1992. стр.280.