ISSN: 2181-3906
2024

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 11 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ: ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА И ПРИЗНАКИ КОШИ

Буров Вячеслав Сергеевич
"Университет экономики и сервиса Термеза"
Направление: Математика
I-курс магистратуры
E-mail: *vburov806@gmail.com*
https://doi.org/10.5281/zenodo.14182128

Аннотация. *В данной работе рассматриваются два основных признака сходимости рядов: признак Даламбера (или критерий Даламбера) и признак Коши. Признак Даламбера основан на анализе отношения соседних членов ряда и позволяет установить сходимость или расходимость ряда в зависимости от поведения этого отношения при стремлении индекса к бесконечности. В свою очередь, признак Коши, также известный как критерий Коши, использует понятие предела частичных сумм и даёт условие сходимости ряда через анализ его частичных сумм и их поведения. Оба этих признака являются мощными инструментами для исследования сходимости числовых рядов и широко применяются в математическом анализе. Рассмотрены их формулировки, примеры применения и особенности использования в различных задачах.*

Ключевые слова: *Признаки сходимости рядов, признак Даламбера, признаки Коши.*

CONVERGENCE TESTS FOR SERIES: D'ALEMBERT'S TEST AND CAUCHY'S TESTS

Abstract. *This paper discusses two main convergence tests for series: D'Alembert's test (or D'Alembert's criterion) and Cauchy's test. D'Alembert's test is based on the analysis of the ratio of adjacent terms of a series and allows one to establish the convergence or divergence of a series depending on the behavior of this ratio as the index tends to infinity. In turn, Cauchy's test, also known as the Cauchy criterion, uses the concept of the limit of partial sums and provides a condition for the convergence of a series through the analysis of its partial sums and their behavior. Both of these tests are powerful tools for studying the convergence of numerical series and are widely used in mathematical analysis. Their formulations, application examples, and features of use in various problems are considered.*

Keywords: *Convergence Tests for Series, D'Alembert's Test, Cauchy's Tests.*

Признак сходимости ряда

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся***,** если его частичные суммы $S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$имеют конечный предел при $N \to \infty$ то есть существует такое $S \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N, для которого выполняется неравенство:

$|S_n - S| < \varepsilon$ при $N > N_0$

Если такого предела не существует, то ряд называется *расходящимся.*

Однако на практике для проверки сходимости ряда часто используют различные признаки сходимости, которые позволяют определить, сходится ли ряд, без вычисления его суммы напрямую.

Признак Даламбера

Признак Даламбера (или критерий Даламбера) является одним из наиболее известных и удобных методов проверки сходимости ряда. Он основан на анализе отношения последовательных членов ряда.

Формулировка признака Даламбера

Пусть a_n — последовательность чисел, и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если существует предел

$$L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

то ряд ведет себя следующим образом:

1. Если $L < 1$, то ряд *сходится*
2. Если $L > 1$, то ряд *расходится*
3. Если $L = 0$, то данный критерий не даёт однозначного ответа, и необходимо применять другие методы сходимости (например, признак Коши, интегральный признак и другие).

1. Пояснение

Признак Даламбера помогает понять, насколько быстро убывают члены ряда. Если отношение последовательных членов ряда стремится к числу меньше единицы ($L < 1$), то члены ряда уменьшаются достаточно быстро, чтобы ряд сходился. Если же это отношение больше единицы ($L > 1$), то члены ряда растут, и ряд расходится. Когда $L = 1$, ряд может вести себя сложно, и для проверки сходимости нужно использовать дополнительные условия или признаки

2. Признаки Коши

Признаки Коши — это общее название для ряда тестов, которые можно использовать для проверки сходимости числовых рядов. В основе этих признаков лежит идея оценки поведения последовательности частичных сумм ряда.

Признак Коши для сходимости ряда

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходимость можно проверить с помощью *признака Коши*, который гласит, что ряд сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что для всех $m,n > N$ выполняется неравенство:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

Это условие означает, что сумма элементов ряда от n-го до m-го (при $m > n$) становится бесконечно малой, когда n и m увеличиваются, то есть частичные суммы стремятся к пределу. Признак Коши является универсальным и может быть использован для всех типов рядов.

Признак Коши для абсолютной сходимости

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ так же сходится.

Для проверки абсолютной сходимости используется тот же принцип, но уже модулей членов ряда. Это дает более строгую проверку сходимости и позволяет отличить абсолютную сходимость от условной.

Сравнение признаков

Признак Даламбера - это быстрый и удобный метод определения сходимости ряда, но его применимость ограничена. Если $L = 1$, то он не может однозначно решить вопрос о сходимости

Признаки Коши являются более универсальными и позволяют проверить сходимость на основе поведения частичных сумм. Однако они могут быть более сложными для вычисления, чем признак Даламбера, особенно для рядов, не обладающих простыми закономерностями

Примеры

1. Признак Даламбера: рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Здесь $a_n = \frac{1}{2^n}$, и отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

Поскольку предел отношений $L = \frac{1}{2} < 1$, ряд сходится

2. Признак Коши: рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Для проверки сходимости с помощью признака Коши рассмотрим частичную сумму ряда от n- го до m-го члена:

$$S_{n,m} = \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}$$

Поскольку члены ряда быстро убывают, мы можем оценить:

$$\left|\sum_{n}^{m}\frac{1}{k^2}\right| < \frac{1}{n}$$

N *можно* $\varepsilon < 0$

Для любого, что для всех $n,m > N$ выполняется

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}\right| < \varepsilon$$

Это доказывает, что ряд сходится по признаку Коши.

3. Заключение

Ряды являются основным инструментом математического анализа, и знание различных признаков сходимости критически важно для их изучения. Признак Даламбера является полезным и быстрым методом проверки сходимости, но его применение ограничено. Признаки Коши предоставляют более общие и мощные критерии, позволяя исследовать более сложные ряды и определять их сходимость на основе поведения частичных сумм.

REFERENCES

1. «Математический анализ» (том 1, 2) — В. М. Розенблюм, И. М. Гельфанд
2. «Математический анализ» — В. А. Зорич
3. «Основы математического анализа» — Ю. М. Дюбровин, А. М. Матвиевич, В. Ф. Субачев
4. «Математический анализ. Часть 1» — А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин
5. «Математический анализ» — А. П. Киселев
6. «Теория функций действительного переменного» — В. В. Смирнов
7. «Методы математического анализа» — Н. П. Фоменко
8. «Сборник задач по математическому анализу» — В. М. Дерибас, Ю. В. Лузин
9. Статьи и учебные материалы на математических форумах и образовательных платформах
10. «Курс математического анализа» — Г. М. Фихтенгольц