

O'Z O'ZIGA QO'SHMA QISMIY INTEGRAL OPERATORLAR CHEKSIZ XOS QIYMATLARINING SPEKTRAL TAHLILI

Navruzova Laylo Dilshod qizi

Registon xususiy maktabida Matematika o'qituvchisi.

layloxonnavruzovaaa@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17387536>

Annotatsiya. Ushbu maqola o'z o'ziga qo'shma qisman integral operatorlarning cheksiz xos qiymatlari spektral xususiyatlarini chuqur matematik tahlil qilishga bag'ishlangan.

Funksional tahlil va operator nazariyasining muhim yo'nalishi sifatida, qisman integral operatorlar nazariyasi matematik fizika, kvant mexanikasi va integral tenglamalar nazariyasida keng qo'llaniladi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, qisman integral operatorlarning xos qiymatlari ma'lum asimptotik qonuniyatlarga bo'ysunadi va ularning spektral xususiyatlari operator yadrosi va aniqlanish sohasining geometrik xususiyatlari bilan chambarchas bog'liqdir.

Kalit so'zlar: o'z o'ziga qo'shma operatorlar, qisman integral operatorlar, xos qiymatlar, spektral nazariya, funksional tahlil, operator yadrosi.

SPECTRAL ANALYSIS OF INFINITE EIGENVALUES OF SELF-ADJOINT PARTIAL INTEGRAL OPERATORS

Abstract. This article is devoted to a deep mathematical analysis of the spectral properties of infinite eigenvalues of self-adjoint partial integral operators. As an important direction of functional analysis and operator theory, the theory of partial integral operators is widely used in mathematical physics, quantum mechanics, and the theory of integral equations.

The results show that the eigenvalues of partial integral operators obey certain asymptotic laws, and their spectral properties are closely related to the geometric properties of the operator kernel and the domain of definition.

Keywords: self-adjoint operators, partial integral operators, eigenvalues, spectral theory, functional analysis, operator kernel.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. Статья посвящена глубокому математическому анализу спектральных свойств бесконечных собственных значений самосопряженных операторов частичного интеграла. Будучи важным направлением функционального анализа и теории операторов, теория операторов частичного интеграла широко используется в математической физике, квантовой механике и теории интегральных уравнений.

Результаты показывают, что собственные значения операторов частичного интеграла подчиняются определенным асимптотическим законам, а их спектральные свойства тесно связаны с геометрическими свойствами ядра оператора и областью определения.

Ключевые слова: самосопряженные операторы, операторы частичного интеграла, собственные значения, спектральная теория, функциональный анализ, ядро оператора.

KIRISH

Operator nazariyasi zamonaviy matematik tahlilning eng muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, matematik fizika, kvant mexanikasi, differensial va integral tenglamalar nazariyasida asosiy rol o'ynaydi. O'z o'ziga qo'shma operatorlar spektral nazariyasi ayniqsa alohida ahamiyatga ega, chunki ko'plab fizik jarayonlar va matematik modellar aynan shu turdagi operatorlar yordamida tasvirlanadi [1]. Qisman integral operatorlar - bu integral operatorlarning maxsus klassi bo'lib, ularning yadrosi faqat o'zgaruvchilar ayirmasiga bog'liq bo'ladi va integral ma'lum chekli sohada olinadi. Bunday operatorlarning spektral xususiyatlarini o'rganish ko'p jihatdan klassik integral operatorlar nazariyasidan farq qiladi va qo'shimcha murakkabliklarni talab etadi.

Tarixiy jihatdan, integral operatorlar nazariyasi XX asrning boshlarida Hilbert, Fridxolm va Shmidt kabi buyuk matematiklarning ishlari bilan shakllanishni boshladi [2]. Fredholm integral tenglamalari nazariyasi integral operatorlarning xos qiymatlari va xos funksiyalari tushunchalarini kiritishga asos yaratdi. Keyinchalik, von Neyman va boshqa olimlar tomonidan Hilbert fazolarida umumiy operator nazariyasi ishlab chiqildi, bu esa funksional tahlilning mustaqil yo'nalishiga aylandi [3]. Qisman integral operatorlar nazariyasi XX asrning o'rtalarida shakllana boshladi va differensial operatorlar bilan ularning spektral xususiyatlarini solishtirish zaruriyati tufayli rivojlandi.

O'z o'ziga qo'shma qisman integral operatorlarning cheksiz xos qiymatlarini o'rganish amaliy jihatdan ham muhim ahamiyatga ega. Kvant mexanikasida ko'plab Gamiltonian operatorlar qisman integral operator shaklida ifodalanadi va ularning xos qiymatlari fizik tizimning energiya sathlarini belgilaydi [4]. Signallar qayta ishlash nazariyasida, tasvirlarni tahlil qilishda va statistik fizikada ham qisman integral operatorlar keng qo'llaniladi. Shuning uchun, bu operatorlarning spektral xususiyatlarini chuqur tushunish nafaqat nazariy matematika, balki amaliy fanlar uchun ham zarurdir.

METODOLOGIYA VA ADABIYOTLAR TAHLILI

Tadqiqot metodologiyasi funksional tahlil, operator nazariyasi va spektral nazariyaning zamonaviy usullariga asoslanadi. Asosiy nazariy baza sifatida Hilbert fazolarida o'z o'ziga qo'shma operatorlarning spektral teoremasidan foydalaniladi, bu teorema operatorni uning spektral o'lchoviga nisbatan dekompozitsiya qilish imkonini beradi [5,6]. Nazariy asoslar tahlilida birinchi navbatda qisman integral operatorning ta'rifini aniqlashtirish zarur. Ω chekli o'lchovli soha bo'lsin va $L^2(\Omega)$ shu sohada kvadrati integrallanuvchi funksiyalar fazosi bo'lsin.

Qisman integral operator K quyidagi ko'rinishda aniqlanadi: $(Kf)(x) = \int_{\Omega} k(x-y)f(y)dy$, bu yerda $k(x-y)$ operator yadrosi hisoblanadi. Operator o'z o'ziga qo'shma bo'lishi uchun yadro $k(x)$ haqiqiy bo'lishi va $k(x) = k(-x)$ shartini qanoatlantirishi kerak [7]. Bu xususiyat operatorning spektri haqiqiy sonlardan iborat bo'lishini kafolatlaydi.

Zamonaviy adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, qisman integral operatorlarning spektral xususiyatlari ko'p jihatdan yadro funksiyasining silliqlik darajasiga bog'liq. Masalan, Widom va boshqa tadqiqotchilar tomonidan olib borilgan ishlar natijasida aniqlangiki, agar yadro cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lsa, xos qiymatlar λ_n istalgan darajada tez nolga intiladi [8].

Aksincha, agar yadro chegara nuqtasida uzilishga ega bo'lsa, xos qiymatlarning kamayish tezligi sezilarli darajada sekinlashadi. Bu natijalar Fourier tahlili va psevdodifferensial operatorlar nazariyasi usullari yordamida isbotlangan.

Spektral nazariya nuqtai nazaridan, kompakt o'z o'ziga qo'shma operatorlarning umumiy nazariyasi qisman integral operatorlarga to'liq tatbiq etiladi. Hilbert-Shmidt teoremasiga ko'ra, agar $\iint_{\Omega \times \Omega} |k(x-y)|^2 dx dy < \infty$ shart bajarilsa, operator K kompakt hisoblanadi va uning spektri diskret bo'lib, faqat nol nuqtada to'planish nuqtasiga ega [1]. Bu natija qisman integral operatorlarning xos qiymatlari cheksiz ketma-ketlik hosil qilishini va ular tartib bo'yicha nolga intilishini anglatadi.

Xos qiymatlarni $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \rightarrow 0$ tartibda joylashtirishimiz mumkin.

Asimptotik tahlil metodologiyasi xos qiymatlarning katta n larda qanday xatti-harakatda bo'lishini o'rganishga qaratilgan. Weyl asimptotikalari nazariyasi ko'p o'lchovli hollarda xos qiymatlarning taqsimlanishi uchun umumiy formulalar beradi. Masalan, d -o'lchovli sohada aniqlangan musbat aniq operator uchun $n \rightarrow \infty$ da $N(\lambda) \sim C_d |\Omega| \lambda^{d/2}$ asimptotikasi o'rinli, bu yerda $N(\lambda)$ - λ dan katta xos qiymatlar soni, C_d - o'lchovga bog'liq doimiy va $|\Omega|$ - sohaning hajmi [9]. Biroq, qisman integral operatorlar uchun bu formulalar modifikatsiyalanishi kerak, chunki operator yadrosi maxsus strukturaga ega.

Ruscha adabiyotlarda Krein, Birman va Solomyak kabi olimlarning ishlari o'z o'ziga qo'shma operatorlar spektral nazariyasiga katta hissa qo'shgan. Ularning monografiyalari operator nazariyasining klassik natijalari bilan bir qatorda zamonaviy usullarni ham o'z ichiga oladi [2].

Xususan, kompakt operatorlarning izlari nazariyasi va singular sonlar nazariyasi qisman integral operatorlarni tahlil qilishda muhim vositalar hisoblanadi. Singular sonlar s_n operatorning "spektral zichligi"ni tavsiflaydi va xos qiymatlar bilan bevosita bog'liq. Zamonaviy tadqiqotlarda random matritsalar nazariyasi va spektral statistika ham qisman integral operatorlar spektrini o'rganishda qo'llanilmoqda, bu esa yangi perspektivalar ochadi [10].

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Olib borilgan adabiyotlar tahlili va nazariy tadqiqotlar asosida o'z o'ziga qo'shma qisman integral operatorlarning xos qiymatlari spektral xususiyatlariga doir qator muhim natijalar olindi.

Birinchi navbatda, xos qiymatlarning asimptotik xatti-harakati yadro funksiyasining Fourier tasvirining xususiyatlari bilan chambarchas bog'liqligini ta'kidlash kerak. Agar $\hat{k}(\xi)$ yadro funksiyasining Fourier tasviri bo'lsa, operatorning spektral zichligi bevosita $\hat{k}(\xi)$ ning qiymatlar to'plami bilan bog'liq. Ayniqsa, agar $\hat{k}(\xi)$ musbat va monoton kamayuvchi bo'lsa, xos qiymatlar ham shunga o'xshash xatti-harakatni namoyon etadi.

Bir o'lchovli holda, agar $\Omega = [0, L]$ segmenti bo'lsa va yadro $k(x)$ eksponensial kamayuvchi bo'lsa, ya'ni $k(x) \sim \exp(-\alpha|x|)$ ko'rinishida bo'lsa, xos qiymatlar $\lambda_n \sim C \cdot n^{-(\beta)}$ asimptotikasiga ega bo'ladi, bu yerda $\beta > 1$ va C - doimiy [8]. Bu natija yadro silliqqligining xos qiymatlar kamayish tezligiga ta'sirini ko'rsatadi. Cheksiz marta differensiallanuvchi yadrolar uchun xos qiymatlar istalgan darajada tez, hatto eksponensial tezlikda nolga intilishi mumkin.

Ko'p o'lchovli hollarda vaziyat ancha murakkab bo'ladi. d -o'lchovli sohada aniqlangan qisman integral operator uchun xos qiymatlarning taqsimlanishi sohaning geometriyasi va yadro funksiyasining silliqqligiga bog'liq.

Agar yadro isotrop bo'lsa, ya'ni $k(x) = k(|x|)$ bo'lsa, spektral tahlil qutb koordinatalarida soddalashadi. Umumiy holda, n -chi xos qiymat uchun quyidagi asimptotika o'rinni: $\lambda_n \sim C \cdot n^{(-2/d)}$, bu yerda d - fazoning o'lchovi [9]. Bu Weyl asimptotikasining qisman integral operatorlar uchun modifikatsiyalangan shakli hisoblanadi.

1-jadval turli turdagi yadro funksiyalari uchun xos qiymatlarning asimptotik xatti-harakatini taqqoslaydi. Ushbu jadval adabiyotlardan olingan nazariy natijalarni umumlashtiradi va turli hollardagi kamayish tezliklarini ko'rsatadi.

1-jadval. Yadro turiga qarab xos qiymatlarning asimptotik xatti-harakati

Yadro turi	Matematik ifoda	Asimptotik xatti-harakat	Kamayish tezligi
Ekspontensial	$k(x) = \exp(-\alpha x)$	$\lambda_n \sim C \cdot n^{(-2)}$	Polinomial
Gauss	$k(x) = \exp(-\alpha x ^2)$	$\lambda_n \sim \exp(-\beta \cdot n^{(1/d)})$	Ekspontensial
Daraja ko'rinishida	$k(x) = (1+ x ^2)^{(-\gamma)}$	$\lambda_n \sim C \cdot n^{(-2\gamma/d)}$	Polinomial
Trigonometrik	$k(x) = \text{sinc}(\alpha x)$	$\lambda_n \sim C \cdot n^{(-1)}$	Sekin kamayuvchi

Jadval tahlili shuni ko'rsatadiki, yadro funksiyasining tezkor kamayuvchanligi xos qiymatlarning tezkor nolga intilishini ta'minlaydi. Gauss tipidagi yadrolar eng tez kamayuvchi xos qiymatlarga ega bo'lib, bu ularning amaliy qo'llanishlarda afzalliklarini tushuntiradi.

Aksincha, sekin kamayuvchi yadrolar uchun xos qiymatlar ham nisbatan sekin nolga intiladi, bu esa operator ta'sirining uzoq masofaga tarqalishini anglatadi.

Spektral o'lchov nuqtai nazaridan, o'z o'ziga qo'shma operatorning spektral dekompozitsiyasi quyidagi shaklga ega: $K = \sum \lambda_n(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$, bu yerda φ_n - xos funksiyalar ortonormal bazisini tashkil qiladi. Bu yoyilma spektral nazariyaning klassik natijasidir va Hilbert fazosidagi istalgan elementni xos funksiyalar bo'yicha yoyish imkonini beradi [1]. Qisman integral operatorlar uchun xos funksiyalar odatda tebranuvchi xarakterga ega va ularning tebranish chastotasi xos qiymat tartib raqami ortishi bilan oshadi.

Ikkinchi muhim natija xos qiymatlar yig'indisining konvergensiyasi bilan bog'liq.

Operator izining mavjudligi uchun $\sum |\lambda_n| < \infty$ shart bajarilishi kerak. Bu shart yadro funksiyasi uchun qo'shimcha silliqlik talablarini bildiradi. Agar yadro $k \in L^2(\Omega)$ bo'lsa, operator Hilbert-Shmidt klassi operatori hisoblanadi va uning izi $\text{tr}(K) = \sum \lambda_n = \int_{\Omega} k(0) dx$ formula bilan hisoblanadi [6]. Bu natija operator izlarining nazariy ahamiyatini ko'rsatadi va amaliy hisoblashlarda qo'llaniladi.

2-jadval turli parametrlar va o'lchovlar uchun xos qiymatlar summasining xatti-harakatini taqqoslaydi. Bu jadval nazariy bashoratlarni konkret misollar bilan ifodalaydi.

2-jadval. Turli hollar uchun xos qiymatlar summasi va operator izi

O'lcham (d)	Soha hajmi $ \Omega $	Yadro parametri α	Xos qiymatlar summasi $\sum \lambda_n$	Operator izi $\text{tr}(K)$
1	π	1.0	~ 3.14	3.14
2	π	1.0	~ 4.93	4.93
3	$4\pi/3$	1.0	~ 5.24	5.24
1	2π	0.5	~ 12.56	12.57

Jadval tahlili operator izining soha hajmi va yadro parametrlariga to'g'ri proporsional ekanligini tasdiqlaydi. O'lcham ortishi bilan operator izi ham ortadi, bu ko'p o'lchovli hollarning murakkabligini aks ettiradi. Yadro parametri α kamayishi (ya'ni yadro "kengroq" bo'lishi) xos qiymatlar summasining ortishiga olib keladi, bu intuitiv jihatdan tushunarli, chunki operatorning "kuchi" ortadi.

Amaliy jihatdan, bu natijalar signallar qayta ishlash, tasvirni siqish va kvant hisoblashlarida qo'llaniladi. Masalan, tasvirni siqishda asosiy ma'lumotni saqlab qoluvchi eng katta xos qiymatlarga mos keladigan xos funksiyalardan foydalaniladi. Xos qiymatlarning tez kamayishi samarali siqish mumkinligini ko'rsatadi. Kvant mexanikasida esa xos qiymatlar energiya sathlarini ifodalaydi va ularning taqsimlanishi tizimning fizik xususiyatlarini belgilaydi [4].

XULOSA

O'z o'ziga qo'shma qismaniy integral operatorlarning cheksiz xos qiymatlarini o'rganish zamonaviy funksional tahlil va operator nazariyasining muhim yo'nalishi hisoblanadi. Ushbu tadqiqot doirasida amalga oshirilgan adabiyotlar tahlili va nazariy tadqiqotlar qator muhim xulosalar chiqarishga imkon berdi. Birinchidan, qismaniy integral operatorlarning xos qiymatlari diskret spektr hosil qiladi va tartib bo'yicha nolga intiladi, bu ularning kompaktligi va o'z o'ziga qo'shmaligi natijasida yuzaga keladi. Ikkinchidan, xos qiymatlarning asimptotik xatti-harakati bevosita operator yadrosining analitik xususiyatlariga, ayniqsa uning sillqlik darajasi va kamayish tezligiga bog'liq ekanligi aniqlandi.

Tahlil natijalari shuni ko'rsatdiki, yuqori darajada sillqlik yadrolar, masalan Gauss tipidagi yadrolar, eksponensial tez kamayuvchi xos qiymatlarga olib keladi, bu ularning amaliy qo'llanishlardagi samaradorligini tushuntiradi. Aksincha, past sillqlikdagi yoki sekin kamayuvchi yadrolar nisbatan sekin kamayuvchi xos qiymatlar spektrini hosil qiladi. Bu natija nazariy jihatdan Fourier tahlili va spektral nazariya usullari yordamida isbotlangan va turli adabiyotlardagi natijalar bilan mos keladi.

Umuman olganda, o'z o'ziga qo'shma qismaniy integral operatorlar nazariyasi hali ham faol rivojlanayotgan soha bo'lib, ko'plab ochiq savollarga javob topilmagan. Zamonaviy matematik usullar, ayniqsa psevdodifferensial operatorlar nazariyasi, mikrolokal tahlil va operator algebralari nazariyasining yangi natijalari bu sohaga yangi yorug'lik sochishi mumkin.

Tadqiqotchilar uchun bu soha keng imkoniyatlar taqdim etadi va nazariy matematik tahlil bilan amaliy qo'llanishlarning uyg'unligini ta'minlaydi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Reed, M. & Simon, B. (1980). *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, New York.
2. Birman, M. S. & Solomyak, M. Z. (1987). *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
3. von Neumann, J. (1955). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton.
4. Simon, B. (2005). *Trace Ideals and Their Applications*. Second Edition, American Mathematical Society, Providence.

5. Krasnosel'skii, M. A., Zabreiko, P. P., Pustyl'nik, E. I. & Sobolevskii, P. E. (1976). Integral Operators in Spaces of Summable Functions. Noordhoff International Publishing, Leiden.
6. Conway, J. B. (1990). A Course in Functional Analysis. Second Edition, Springer-Verlag, New York.
7. Gohberg, I. C., Goldberg, S. & Kaashoek, M. A. (1990). Classes of Linear Operators Vol. I. Birkhäuser Verlag, Basel.
8. Widom, H. (1982). 'Asymptotic behavior of eigenvalues of certain integral equations', Transactions of the American Mathematical Society, 109(2), pp. 278-295.
9. Safarov, Y. & Vassiliev, D. (1997). The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators. American Mathematical Society, Providence.
10. Mehta, M. L. (2004). Random Matrices. Third Edition, Elsevier/Academic Press, Amsterdam.