

ПЕРИОДИЧЕСКИ РЕЖИМ В ПРОЦЕССЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В
ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА ИМПУЛЬСНОГО
ВОЗДЕЙСТВИЯ

Елгондиев К.К.

elgondiev.61@gmail.com

Сулайманова Н.Б.

nilufarsulaymanova000@gmail.com

Каракалпакский государственный университет им. Бердаха.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.23347828>

Аннотация. Рассмотрена задача о распространении тепла в тонкой прямоугольной пластинке с внутренними источниками тепла, способными оказывать мгновенное (импульсное) влияние на процесс теплопроводности в фиксированные моменты времени. В качестве математической модели принята начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями и импульсными воздействиями. Исследован вопрос существования и единственности решения такой смешанной задачи, а также получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых полученное решение является T -периодическим по времени.

Ключевые слова: теплопроводность в пластинке, импульсные воздействия, смешанная задача, существование решения, периодические режимы, дифференциальное уравнение в частных производных, краевые условия.

Введение

Теория дифференциальных уравнений с импульсивными эффектами является важной и быстро развивающаяся область современной математики. Эта область тесно связана с широким применением теории дифференциальных уравнений в анализе многочисленных математических моделей, описывающие различные процессы, возникающие в механике, биологии, химии, экономике и многих других научных, технологических и практических областях. Такие области часто включают в себя явления и процессы краткосрочного или резкого характера, включая внезапные скачки, потрясения вызывающие прерывистые эффекты [1]. Первоначально при математическом моделировании явлений импульсивного или скачкообразного типа обобщенные функций, в частности дельта-функции Дирака.

Однако этот подход не всегда хорошо соответствуют понятию классических решений дифференциальных уравнений, которые обычно используются в качестве математических моделей таких процессов.

В дальнейшем были введены дифференциальные уравнения с разрывными правыми сторонами. описывающие процессы, характеризующиеся внезапными изменениями в их поведении. К сожалению, это подход часто ограничивал эффективное применение классических методов современной теории дифференциальных уравнений. В настоящее время системы, испытывающие импульсные эффекты, чаще всего описываются дифференциальными уравнениями, действующими на интервалах, где импульсы не

возникают, в сочетании с дополнительными условиями, известные как условия импульсивных воздействий [1,2]. Эти условия математически определяют, как траектория системы резко меняется с одного пути на другой по заданному правилу. Импульсные дифференциальные уравнения обычно классифицируются на две категории: те, в которых импульсы возникают в заданные фиксированные моменты времени, и те, в которых импульсы возникают в переменные (не фиксированные) моменты времени [1,5,8]. В первом случае моменты импульса известны априори.

В настоящее время теория систем с импульсными эффектами является не только важным практическим применением дифференциальных уравнений, но также является источником значительных математических проблем. Дополнительные импульсивные условия порождают множество нетривиальных математических задач и порождают уникальные свойства, характерные исключительно для импульсивных дифференциальных уравнений. В самом деле, даже линейные уравнения обычно приобретают нелинейные свойства, когда для этих уравнений поставлены условия импульсных воздействий. Одним из главных последствий импульсивных действий является глубокая модификация их в качественном поведении решений систем дифференциальных уравнений. Условия импульсивных воздействий могут повлиять на разрешимость задачи, продолжение решений и их устойчивость. Они также могут приводить к существованию решений в более широких функциональных классах, например квазипериодических решения, которые не происходят в соответствующих системах без импульсов. Тем более, даже линейные системы с импульсивными эффектами могут проявлять хаотичную динамику [4,5]. Вопросам существования, качественного поведения и коаксиальной разветвленности периодических решений различных классов дифференциальных уравнений с импульсным воздействием посвящено множество исследований. Настоящая работа посвящена исследованию проблем, связанных с проблемой теплопроводности в тонкой прямоугольной однородной пластинке со встроенным источником тепла, способным мгновенно влиять на процесс распространения [9].

Рассмотрим задачу о распространении тепла в прямоугольной тонкой однородной пластинке, находящейся под воздействием некоторых источников тепла, способных в моменты времени $t_p > 0$, $p = 1, 2, \dots$, “мгновенно” изменить температуру пластинки в точке (x, y) на заданную величину $I_p(x, y)$, $p = 1, 2, \dots$, соответственно. При этом считаем начальное распределение температуры в пластинке заданным, а в контуре пластинки поддерживается заданная температура. Эта задача сводится к решению уравнения

$$u_t = \sigma^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t \in R_+ \setminus \{t_p\} \quad (1)$$

при начальном условии

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (2)$$

при граничных условиях

$$u(0, y, t) = \psi_1(y, t), \quad u(a, y, t) = \psi_2(y, t) \quad 0 \leq y \leq b, \quad t \in [0; +\infty) \quad (3)$$

$$u(x, 0, t) = \gamma_1(x, t), \quad u(x, b, t) = \gamma_2(x, t) \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \in [0; +\infty)$$

и условиями импульсных воздействия

$$\Delta u(x, y, t)|_{t=t_p} = I_p(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (4)$$

где $I_p(x, y)$, $p = 1, 2, \dots$, $\varphi(x, y)$ - непрерывные и имеющие кусочно - гладкие производные в прямоугольнике $K = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ функции; $\psi_k(x, t), \gamma_k(x, t)$, $k = 1, 2$, - заданные на множествах $(y, t) \in [0, b] \times [0, +\infty)$, $(x, t) \in [0, a] \times [0, +\infty)$ соответственно, непрерывные функции, рассматриваемая как функция переменных x и y может быть разложена в ряд Фурье.

Решение задачи (1)-(4) будем искать в виде ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m} T_{nm}(t) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (5)$$

где

$$T_{nm}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u(\xi, \eta, t) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta \quad (6)$$

В (6) производим интегрирование по частям по переменной X и с учетом граничных условий

$$\begin{aligned} T_{nm}(t) = & \frac{4}{n\pi b} \int_0^b [\psi_1(\eta, t) - (-1)^n \psi_2(\eta, t)] \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\eta - \\ & - \frac{4a}{n^2 \pi^2 b} \int_0^b \int_0^a u_{\xi\xi} \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7)$$

В силу уравнения (1) выполнено соотношение

$$u_{xx} = \frac{1}{\sigma^2} u_t - u_{yy} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\begin{aligned} T_{nm}(t) = & \frac{4}{n\pi b} \int_0^b [\psi_1(y, t) - (-1)^n \psi_2(y, t)] \sin \frac{m\pi}{b} y dy - \\ & - \frac{4a}{n^2 \pi^2 b \sigma^2} \int_0^b \int_0^a u_t \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy + \frac{4a}{n^2 \pi^2 b} \int_0^b \int_0^a u_{yy} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее в последнем слагаемом в (9) интегрированием по частям два раза по переменной y , тогда в силу (3), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left(u_y \sin \frac{m\pi}{b} y \Big|_0^b - \frac{m\pi}{b} \int_0^b u_y \cos \frac{m\pi}{b} y dy \right) \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \\ & = \frac{-m\pi}{b} \int_0^a \left(u \cos \frac{m\pi}{b} y \Big|_0^b + \frac{m\pi}{b} \int_0^b u \sin \frac{m\pi}{b} y dy \right) \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \\ & = \frac{m\pi}{b} \int_0^a [\gamma_1(x, t) - (-1)^m \gamma_2(x, t)] \sin \frac{n\pi}{a} x dx - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \int_0^a \int_0^b u \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{a} x dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

В силу (10) выражение (9) преобразуется к виду

$$T_{nm}(t) = \frac{4am}{n^2 b^2 \pi^2} \int_0^a [\gamma_1(x, t) - (-1)^m \gamma_2(x, t)] \sin \frac{n\pi}{a} x dx +$$

$$+ \frac{4}{n\pi b} \int_0^b [\psi_1(y, t) - (-1)^n \psi_2(y, t)] \sin \frac{m\pi}{b} y dy -$$

$$- \frac{4a}{n^2 \pi^2 b \sigma^2} \int_0^a \int_0^b u_t(x, y, t) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy - \frac{4am^2}{n^2 b^3} \int_0^a \int_0^b u(x, y, t) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy$$
(11)

Дифференцируя (6) по t имеем

$$T'_{nm}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u_t(x, y, t) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy$$
(12)

Тогда с учётом (5) и (12) из (11) получим

$$T'_{nm}(t) + \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right) \sigma^2 \pi^2 T_{nm}(t) = \frac{4m\pi\sigma^2}{ab^2} \int_0^a [\gamma_1(x, t) - (-1)^m \gamma_2(x, t)] \sin \frac{n\pi}{a} x dx +$$

$$+ \frac{4n\pi\sigma^2}{a^2 b} \int_0^b [\psi_1(y, t) - (-1)^n \psi_2(y, t)] \sin \frac{m\pi}{b} y dy, \quad t \neq t_p, \quad p = 1, 2, \dots$$
(13)

Из условия импульсного воздействия (4) и начального условия (2), соответственно, следует

$$\Delta T_{nm}(t) \Big|_{t=t_p} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b I_p(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy$$
(14)

$$T_{nm}(0) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \phi(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy$$
(15)

Решая уравнение (13) при условии импульсного воздействия (14) и начального условия (15), получим

$$T_{nm}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \phi(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t} +$$

$$+ \frac{4}{ab} \sum_{0 < t_p < t} \int_0^a \int_0^b I_p(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-t_p)} +$$

$$+ \frac{4m\pi\sigma^2}{ab^2} \int_0^t \int_0^a [\gamma_1(x, \tau) - (-1)^m \gamma_2(x, \tau)] \sin \frac{n\pi}{a} x dx e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \frac{4n\pi\sigma^2}{a^2 b} \int_0^t \int_0^b [\psi_1(y, \tau) - (-1)^n \psi_2(y, \tau)] \sin \frac{m\pi}{b} y dy e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-\tau)} d\tau$$

Подставляя найденное для $T_n(t)$ выражение в (5), получим ряд Фурье для функции $u(x, y, t)$ вида

$$u(x, y, t) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy \right) e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t} +$$

$$\sum_{0 < t_p < t} \int_0^a \int_0^b I_p(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-t_p)} + \frac{m\sigma^2}{b} \int_0^a \int_0^b [\gamma_1(x, \tau) - (-1)^m \gamma_2(x, \tau)] \sin \frac{n\pi}{a} x dx \times$$

$$\times e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-\tau)} d\tau + \frac{n\pi\sigma^2}{a} \int_0^b [\psi_1(y, \tau) - (-1)^n \psi_2(y, \tau)] \sin \frac{m\pi}{b} y dy e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-\tau)} d\tau \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

2. Рассмотрим частные случаи.

Отсюда предполагая, что $\gamma_1(x, t) = \gamma_2(x, t) = 0$, $0 \leq x \leq a$, $t \in [0; +\infty)$ и $\psi_1(y, t) = \psi_2(y, t) = 0$, $0 \leq y \leq b$, $t \in [0; +\infty)$ получим функцию

$$u(x, y, t) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b \phi(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy \right) e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t} +$$

$$+ \sum_{p=1}^k \int_0^a \int_0^b I_p(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-t_p)} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

представляющую собой решение (1)-(4) и описывающую процесс распространения тепла в однородной пластинке, контуры которой теплоизолированы.

Так как функции $\phi(x, y)$ и $I_p(x, y)$, $p=1, 2, \dots$ согласно предположению непрерывны, имеют кусочно-непрерывную производную и обращаются в нуль на границах области $[0, a] \times [0, b]$, то ряды Фурье

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b \varphi(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta \right) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b I_p(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta \right) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

сходятся абсолютно и равномерно к $\phi(x, y)$, $I_p(x, y)$ соответственно.

Так как для $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k=0, 1, 2, \dots$, где $t_0=0$, имеем $t-t_k \geq 0$, то выполняются неравенства

$$0 < e^{-\pi^2 \sigma^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-t_p)} \leq 1, \quad p=1, 2, \dots, \quad 0 < e^{-\pi^2 \sigma^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t} \leq 1$$

и, следовательно, ряды

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b \varphi(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta \right) e^{-\pi^2 \sigma^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b I_p(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta \right) e^{-\pi^2 \sigma^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t-t_p)} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

также сходятся при каждом $p \in N$ в области D . Поэтому функция $u(x, y, t)$, определённая выражением (17), непрерывна в D , имеет разрывы первого рода при $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет начальному условию (2), тривиальным граничным условиям и условиям импульсного воздействия (4).

Покажем, что функция $u(x, y, t)$ при $t \neq t_k, k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в области D . Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (17) по членным дифференцированием по x два раза и по t один раз, также сходятся абсолютно и равномерно в области D . Это утверждение следует из того, что при любом $t \in (t_p, t_{p+1})$ и достаточно больших $n, m \in N$ имеют места неравенства

$$0 < e^{-\pi^2 \sigma^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t - t_p)} \leq 1, \quad p = 1, 2, \dots, \quad 0 < e^{-\pi^2 \sigma^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t} \leq 1, \quad p = 1, 2, \dots.$$

Следовательно, формула (17) отражает процесс распространения тепла в пластинке размерами $a \times b$, на границах которого поддерживается нулевая температура и которой находится под воздействием источников, способных в фиксированные моменты времени $t_p, p = 1, 2, \dots$ “мгновенно” изменить температуру пластинки в точке с координатами (x, y) на величину $I_p(x, y), p = 1, 2, \dots$.

Если дополнительно положить $\varphi(x) = 0$ для всех $(x, t) \in D$, то температура стержня будет изменяться по закону

$$u(x, y, t) = \frac{4}{ab} \sum_{n, m=1}^{\infty} \sum_{0 < t_p < t} \left(\int_0^a \int_0^b I_p(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{m\pi}{b} \eta d\xi d\eta \times \right. \\ \left. \times e^{-\pi^2 \sigma^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (t - t_p)} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

В этом случае температура пластинке меняется по времени благодаря только источниками тепла импульсной природы.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с начальным условием (2), граничным условием вида

$$\begin{cases} u_x(0, y, t) - h_1 u(0, y, t) = 0, \\ u_y(x, 0, t) - h_2 u(x, 0, t) = 0, \\ u_x(a, y, t) - h_1 u(a, y, t) = 0 \\ u_y(x, b, t) - h_2 u(x, b, t) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

где h – коэффициент теплопроводности (вместо a , чтобы не путать с размером пластины a), и условием импульсного воздействия (4). В этом случае применяя метод разделения переменных получим краевую задачу относительно функции $X(x)$ вида:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0 \\ X'(0) - h_1 X(0) &= 0, \quad X'(a) - h_1 X(a) = 0 \\ Y''(y) + \gamma^2 Y(y) &= 0 \\ Y'(0) - h_2 Y(0) &= 0, \quad Y'(b) - h_2 Y(b) = 0 \end{aligned}$$

Известно, что собственные значения этой краевой задачи, после замены $\mu = \lambda a$, $\nu = \gamma b$ определяются из уравнение $2ctg\mu = \frac{\mu}{h_1 l} - \frac{h_1 a}{\mu}$, $2ctg\nu = \frac{\nu}{h_2 l} - \frac{h_2 b}{\nu}$ и имеют вид $\lambda_n^2 = \left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\gamma_m^2 = \left(\frac{\nu_m}{b}\right)^2$, $m = 1, 2, 3, \dots$, а соответствующие этим собственным значениям собственные функций записываются в виде

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \cos \frac{\mu_n}{a} x + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots \\ Y_m(y) &= \cos \frac{\nu_m}{b} y + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} y, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{20}$$

Система (20) образует ортогональную систему функций, с помощью которой произвольную функцию из пространства $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ можно записать в виде её ряда Фурье.

Тогда решение задачи (1), (2), (4), (19) можно представить в виде ряда Фурье по системе функций (20) следующим образом:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} x + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} x \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} y + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} y \right), \tag{21}$$

где

$$T_n(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u(x, y, t) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} x + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} x \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} y + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} y \right) dx dy \tag{22}$$

Подставляя (21) в уравнение (1) с учётом ортогональности системы функций (20) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T'_{nm}(t) + \omega_{nm}^2 T_{nm}(t) = 0, \quad t \neq t_p, \quad p = 1, 2, \dots \tag{23}$$

где $\omega_{nm}^2 = a^2 \left[\left(\frac{\mu_n}{a} \right)^2 + \left(\frac{\nu_m}{b} \right)^2 \right], \quad n, m = 1, 2, \dots$

Из начального условия (2) в силу (21) и (22) и с учётом ортогональности системы функций (20), находим для функций $T_{nm}(t)$, $n, m = 1, 2, \dots$, начальные значения

$$T_{nm}(0) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(\xi, \eta) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right) d\xi d\eta. \tag{24}$$

Аналогичным образом из условия импульсного воздействия (4), имеем

$$\Delta T_{nm}(t)|_{t=t_p} = I_{nm,p} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b I_p(\xi, \eta) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right) d\xi d\eta \tag{25}$$

Решая уравнение (23) при начальном условии (24) и с учётом условия импульсного воздействия (25), получим

$$T_{nm}(t) = \frac{4}{ab} \left(\int_0^a \int_0^b \varphi(\xi, \eta) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right) d\xi d\eta e^{-\omega_{nm}^2 t} + \right. \\ \left. + \sum_{0 < t_p < t} \left(\int_0^a \int_0^b I_p(\xi, \eta) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right) d\xi d\eta \right) e^{-\omega_{nm}^2 (t-t_p)} \right) \quad (26)$$

где $t \in [t_k; t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$

Подставляя (26) в (21), решение задачи (1), (2), (4), (19) записываем в виде

$$u(x, y, t) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b \varphi(\xi, \eta) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right) d\xi d\eta e^{-\omega_{nm}^2 t} + \right. \\ \left. + \sum_{0 < t_p < t} \left(\int_0^a \int_0^b I_p(\xi, \eta) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right) d\xi d\eta \right) e^{-\omega_{nm}^2 t} \times \right. \\ \left. \times \left(\cos \frac{\mu_n}{a} x + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} x \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} y + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} y \right) \right) \quad (27)$$

Поскольку функций $\varphi(x, y)$, $I_p(x, y)$, $p = 1, 2, \dots$ непрерывные по переменным x, y и имеют кусочно – непрерывные производные на отрезке $[0, a] \times [0, b]$ ряды Фурье этих функций,

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{0 < t_p < t} \int_0^a \int_0^b I_p(x, y) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} x + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} x \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} y + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} y \right) dx dy e^{-\omega_{nm}^2 (t-t_p)} \times \\ \times \left(\cos \frac{\mu_n}{a} x + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} x \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} y + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} y \right) \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} x + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} x \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} y + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} y \right) dx dy e^{-\omega_{nm}^2 t} \times \\ \times \left(\cos \frac{\mu_n}{a} x + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} x \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} y + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} y \right)$$

по ортогональной системе (20) сходится абсолютно и равномерно в интервале $[0, a] \times [0, b]$.

Таким образом, ряд (27) является решением уравнения (1) с начальным условием (2), условием импульсного воздействия (4) и граничным условием (19).

В частности, из (27) следует функция,

$$u(x, y, t) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\int_0^a \int_0^b e^{-\omega_{nm}^2 t} \varphi(\xi, \eta) \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right) d\xi d\eta + \right.$$

$$+ \sum_{0 < t_p < t} \int_0^a \int_0^b I_p(\xi, \eta) e^{-\omega_{nm}^2(t-t_p)} \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right) d\xi d\eta \times \\ \times \left(\cos \frac{\mu_n}{a} \xi + \frac{h_1 a}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{a} \xi \right) \left(\cos \frac{\nu_m}{b} \eta + \frac{h_2 b}{\nu_m} \sin \frac{\nu_m}{b} \eta \right),$$

описывающая процесс распространения тепла в стержне с импульсным воздействием, на концах которого происходит свободный теплообмен с окружающей средой.

Условия периодичности. В различных практических приложениях особый интерес представляет определение условий, при которых процессы теплопроводности, математической моделью которых является уравнения (1) с условиями (2)-(4) или условиями (3)-(4), (15), уравнения (18) с условиями (19)-(21), становится периодическими во времени.

В этом контексте ответ можно выразить в терминах условий налагаемых на величин и моментов импульсных воздействий, считая, что решение $u(x, y, t)$ задачи (1)-(4) непрерывна

справа по t в точках множества $J = \{(x, y, t_p), 0 < x < a, 0 < y < b, p \in N\}$.

Теорема 1.(необходимые условия). Пусть задача (1)-(4) по переменной t имеет периодическое с некоторым периодом $T > 0$ решение $u^*(x, y, t)$. Тогда существует натуральное число m такое, что для всех натуральных p выполняются условия периодичности вида

$$t_{p+m} = t_p + T, \quad I_{p+m}(x, y) = I_p(x, y), \quad 0 < x < a, 0 < y < b. \quad (28)$$

Доказательство. Сначала покажем, что если $t_{p_0} \in J$, p_0 – некоторое натуральное число, и $I_{p_0}(x, y)$ тождественно не равно нулю в $(0, l)$, то существует $p_1 \in N$ такое, что $t_{p_1} \in J$ и $t_{p_1} = t_{p_0} + T$

Предположим противное. Если $(x, y, t_{p_0} + T) \notin J$, то функция $u^*(x, y, t)$ является непрерывной по t в точке $(x, y, t_{p_0} + T)$, в то время как $u^*(x, y, t)$ имеет разрыв первого рода в точке (x, y, t_{p_0}) , причём в силу (1) и (4) выполняется равенство

$$u^*(x, y, t_{p_0} + 0) - u^*(x, y, t_{p_0} - 0) = I_{p_0}(x, y) \neq 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b,$$

что с учётом предположения о периодичности функции $u^*(x, y, t)$ по переменной t приводит к противоречию.

Таким образом, если $(x, y, t_{p_0}) \in J$, то существует $(x, y, t_{p_1}) \in J$ такое, что $t_{p_1} = t_{p_0} + T$.

Обозначим $p_1 - p_0 = m \geq 1$. Тогда в силу произвольности точки $(x, y, t_{p_0}) \in J$ равенства $t_{p+m} = t_p + T$ выполняются для всех $p \in N$.

Рассмотрим теперь значение функции $u^*(x, y, t)$ в точках (x, y, t_{p_0}) и $(x, y, t_{p_0} + T)$, где $p_0 \in N$ произвольно и $0 < x < a$, $0 < y < b$. Тогда в силу периодичности функции $u^*(x, y, t)$ справедливы равенства:

$$u^*(x, y, t) \equiv u^*(x, y, t + T), t \in (t_{p_0-1}, t_{p_0+1}) \setminus \{t_{p_0}\},$$

$$u^*(x, y, t_{p_0} + 0) = u^*(x, y, t_{p_0} + T + 0), u^*(x, y, t_{p_0} - 0) = u^*(x, y, t_{p_0} + T - 0).$$

Из этих равенств и из условия импульсного воздействия (4), следует

$$I_{p_0}(x, y) = u^*(x, y, t_{p_0} + 0) - u^*(x, y, t_{p_0} - 0) = u^*(x, y, t_{p_0} + T + 0) - u^*(x, y, t_{p_0} + T - 0) = I_{p_0+m}(x, y).$$

Учитывая, что p_0 – произвольное, отсюда получим $I_{p+m}(x, y) = I_p(x, y)$ для всех $p \in N$.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Для существования периодических с периодом T решения для случая задачи (1)-(4) достаточно выполнения равенства

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy = & \left(e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) t} \left(1 - e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) T} \right) \right) \times \\ & \times \left[\sum_{t < t_p < t+T} I_p(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (T-t_p)} + \right. \\ & + \frac{m\pi\sigma^2}{b} \int_0^T \int_0^a \left[\gamma_1(x, \tau) - (-1)^m \gamma_2(x, \tau) \right] e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (T-\tau)} \sin \frac{n\pi}{a} x dx d\tau + \\ & \left. + \frac{n\pi\sigma^2}{a} \int_0^T \int_0^b \left[\psi_1(y, \tau) - (-1)^n \psi_2(y, \tau) \right] e^{-\sigma^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) (T-\tau)} \sin \frac{m\pi}{b} y dy d\tau \right]. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы следует из тождества $u(r, t + T) \equiv u(r, t)$ с учетом условий (28)

Литературы

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific Series on Non-Linear Sciences. Ser. A. V.14. –Singapore: World Scientific. -1995. 462 p.
2. Akhmet M.U. Li–Yorke chaos in the system with impacts// J. Math. Anal. Appl. 351 (2009), P. 804–810.
3. Samoilenko V.Hr., Yelgondyev K.K. On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects// Jorn. Facta Universitatis / Series: Mechanics, automatic control and robotics, 1998. №2(2). P.635-639.

4. Samoilenko V.Hr., Yelgondyev K.K. On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects// *Jorn. Facta Universitatis / Series: Mechanics, automatic control and robotics*, 1998. №2(2). P.635-639.
5. Samoilenko V.G., Elgondyev K.K. On periodic solutions of linear differential equations with pulsedh influence, *Ukr. Math. J.*, 49 (1997), P. 156–164.
6. Lakshmikanthain V., Baynov D.D., Simeonov P.S. *Theory of impulsive differential equations*. Singapore, 1989.
7. Skripnik N.V. Averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-handside, *Mat.Stud.*, 55 (2021), 1, P.76–84.
8. Самойленко В.Г., Елгондиев К.К. Исследование линейных дифференциальных уравнений в R^2 . Припринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.59. Киев, 1989. 32 с.
9. Елгондиев К.К. Распространение тепла в однородном шаре по действием импульсных источников. // Докл. АН Руз. 2003, №1. –С.18-20.
10. Elgondiev K.K. Oscillatory processes under impulsive perturbations, *Mat.Stud.*, 65 (2026), 107-112.
11. Elgondiev K.K., Kamalova O.X. Existence of periodic solutions to second-order linear differential equation systems with impulsive effects, *Science and Education in Karakalpakstan.*, 2026 № 3/1 ISSN 2181-9203