ISSN: 2181-3906
2025

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С ОПЕРАТОРОМ М.САЙГО В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Бекматов Турдиали Мирзалиевич
“Университет экономики и сервиса Термеза”
Направление: Математика I-курс магистратуры.
Xurramov Nosir Hamidovich
Научный руководител.

https://doi.org/10.5281/zenodo.15164514

Пусть D- конечная область евклидовой плоскости независимых переменных x и y, ограниченная характеристиками $AC: \xi = 0, BC: \eta = 1$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \qquad (1)$$

Оператора

$L(u) = u_{yy} - (-y)^m u_{xx}, \quad m = const > 0$

И отрезком $AB: 0 \leq x \leq 1$ прямой $y = 0$

В области D рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение Геллерстедта

$$L(u) - \mu\left(I_{0+}^{a,b,c} u(t,0)\right)(x) = f(x,y), \mu = const \qquad (2)$$

Здесь $\left(I_{0+}^{a,b,c} f\right)(x)$- обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n z^n}{(\gamma)_n n!};$$

$$\left(I_{0+}^{a,b,c}\right) = \frac{x^{-a-b}}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} F\left(a+b, -c; a; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt,$$
$$(0 < x < 1, \alpha > 0, \beta, \eta \in C)$$

$$\left(I_{0+}^{a,b,c} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{a+n,b-n,c-n} f\right)(x), (0 < x < 1, \alpha \leq 0, b, c \in C, n = [-\alpha] + 1)$$

Определение. Заданное в n-мерной области D евклидова пространства точек $z = (x_1, x_2, \dots x_n)$ уравнение $L(\omega) = f(z)$ называется нагруженным, если оно содержит некоторые операции от следа искомого решения $\omega = \omega(z)$ на принадлежащих замыканию $\overline{D}$ многообразиях размерности меньше n

ISSN: 2181-3906 2025

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

Задача A_1 (смешанная задача). Найти регулярное в области D решение уравнения (2) из класса $C(\bar{D}) \cap C'(D \cup I)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AC} = \varphi(\eta), \eta \in \bar{I}; \qquad (3)$$

$$A\left(I_{0+}^{a_1,b_1,c_1} u(t,0)\right)(x) + B\left(I_{0+}^{a_2,b_2,c_1} u_y(t,0)\right)(x) = C(\left(I_{0+}^{a_3,b_3,c_1} \psi(t,0)\right)(x), \in I, \quad (4)$$

Где A, B, C-действительные числа, $B \neq 0$

Будем предполагать, что

$f(x,y) \in C'(D) \cap C^3(D), \varphi(\eta), \psi(\eta) \in C'(\bar{I}) \cap C^2(I)$

Пусть, как и принято, введены обозначения

$$\tau(x) = \lim_{y \to 0-0} u(x,y), \quad v(x) = \lim_{y \to 0-0} u(x,y)$$

Уравнение (2) и краевые условия (3),(4) в характеристических координатах (1) принимают вид

$$EV = V_{\xi\eta} + \frac{\beta}{\eta - \xi}(V_\xi - V_\eta) = \frac{-1}{(\eta - \xi)^{4\beta}}\left[\mu\left(I_{0+}^{a,b,c}\tau\right)(\xi) + F(\xi,\eta)\right],$$

$$\beta = \frac{m}{2m+4}, 0 < \beta < \frac{1}{2} \qquad (6)$$

$$V|_{\xi=0} = \varphi(\eta), \eta \in \bar{I} \qquad (7)$$

$$A\left(I_{0+}^{a_1,b_1,c_1}\tau\right)(\xi) + B\left(I_{0+}^{a_2,b_2,c_1}v\right)(\xi) = C\left(I_{0+}^{a_3,b_3,c_1}\psi\right)(\xi) \qquad (8)$$

$$V(\xi,\eta) = u\left[\frac{\xi+\eta}{2}, \left(\frac{\eta-\xi}{2-4\beta}\right)^{1-2\beta}\right], F(\xi,\eta)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta} f\left[\frac{\xi+\eta}{2}, \left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta} (\eta-\xi)^{1-2\beta}\right]$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть при $m > 0$

$$a > 0, b \leq \frac{2-m}{2+m}, c < 1 - a; \qquad (9)$$

$$a_2, a_3 > 0, a_1 > a_2, a_3 > a_2, b_1 - b_2 + 2\beta > 0, b_3 - b_2 + 2\beta > 0 \qquad (10)$$

И $-1 < a \leq 0, b < c < \frac{2-m}{2+m}$, если $0 < m < 2$

Тогда задача A_1 всегда разрешима и притом единственным образом.

Доказательство. Предположим существование решения задачи Дарбу

$$\left[(\eta-\xi)^{2\beta}(V_\eta - V_\xi)\right]_{\eta=\xi} = -\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} v(\xi), \xi \in I \qquad (11)$$

ISSN: 2181-3906 2025

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

$$V|_{\xi=0} = \varphi(\eta), \eta \in \bar{I} \qquad (12)$$

Для уравнения (2) в области $\Delta = \{(\xi,\eta): 0 < \xi < \eta < 1\}$, являющейся образом области D при преобразованиях (1). Тогда оно удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}V(\xi,\eta) + \gamma_0\mu \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} \frac{I_{0+}^{a,b,c}\tau}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}} H(\xi_1,\eta_1,\xi\xi)d\eta_1 \\ = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \int_0^{\xi} v(\xi_1)[(\xi-\xi_1)(\eta-\xi_1)^{-\beta}]d\xi_1 \\ + \int_0^{\eta} \left[\varphi'(\eta_1) + \beta\frac{\varphi_1(\eta_1)}{\eta}\right] H(0,\eta_1;\xi\xi)d\eta_1 \\ + \gamma_0 \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} \frac{F(\xi_1,\eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}} H(\xi_1,\eta_1,\xi\xi)d\eta_1 \qquad (13)\end{aligned}$$

Где $\quad \gamma_0 = -\frac{1}{4}(2-4\beta)^{4\beta}; \quad \gamma = \frac{\partial(\beta)}{\partial(2\beta)\partial(1-\beta)}$

$H(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta)$-функция Грина- Адамара задачи (11)-(12) для оператора EV

$$H(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta) = \begin{cases} (\eta_1-\xi_1)^{\beta}(\eta-\xi_1)^{-\beta}F(\beta,1-\beta;1;\sigma_1), \eta_1 \geq \xi \\ \gamma(\eta_1-\xi_1)^{\beta}(\xi-\xi_1)^{-\beta}(\eta-\eta_1)^{-\beta}F\left(\beta,\beta;2\beta;\frac{1}{\sigma_1}\right), \eta_1 \leq \xi \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}{(\eta_1-\xi_1)(\eta-\xi)}$$

Применив к обеим частям (8) оператор $(I_{0+}^{-a_2,-b_2,a_2+c_1}f)(x)$ и воспользовавшись формулой [1]-[3]

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\left(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}\tau\right)(t)\right)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f)(x)(\gamma>0)$$

Определим функцию $\nu(\xi)$:

$$\nu(\xi) = -\frac{A}{B}(I_{0+}^{a_1-a_2,b_1-b_2,a_2-c_1}\tau)(\xi) + \frac{C}{B}(I_{0+}^{a_3-a_2,b_3-b_2,a_2+c_1}\psi)(\xi) \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), после перехода в полученном выражении к пределу при $\eta \to \xi, 0 < \xi < 1$, получим интегральное уравнение относительно функции $\tau(\xi)$

$$\tau(\xi) + \gamma_{11}\int_0^{\xi} \frac{(I_{0+}^{a,b,c}\tau)dt}{(\xi-t)^{4\beta-1}} + \gamma_{12}\int_0^{\xi} \frac{(I_{0+}^{a_1-a_2,b_1-b_2,a_2+c_1}\tau)dt}{(\xi-t)^{2\beta}} = \mathrm{g}(\xi), \qquad (15)$$

Где $\gamma_{11} = \gamma\gamma_0\mu e(1-\beta,1-2\beta)$, $\gamma_{12} = \frac{A}{e}\frac{\gamma}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}$,

ISSN: 2181-3906 2025

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

$$\mathrm{g}(\xi) = \gamma_{13}\int_0^{\xi}\frac{(I_{0+}^{a_3-a_2,b_3-b_2,a_2+c_1}\psi)dt}{(\xi-t)^{2\beta}} + \gamma\xi^{-\beta}\int_0^{\xi}\left[\varphi'(t)+\beta\frac{\varphi(t)}{t}\right]t^{2\beta}(\xi-t)^{-\beta}dt$$
$$+\gamma_0\gamma\int_0^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}dt\int_t^{\xi}F(t,s)(s-t)^{-2\beta}(\xi-s)^{-\beta}ds \qquad (16)$$

$$\gamma_{13} = \frac{C}{B}\frac{\gamma}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}$$

Рассмотрим оператор

$$T\big(\tau(x)\big) = \int_0^x (x-t)^{1-4\beta}(I_{0+}^{a,b,c}\tau)(s)dt$$

Доказано, что если $a > 0, b \le \frac{2-m}{2+m}, c < 1-a$ при $m > 0$, то справедливо следующее представление:

$$\mathrm{T}\big(\tau(\xi)\big) = \int_0^{\xi} s^{1-4\beta-b}K(\sigma)\tau(s)ds, \qquad (17)$$

Где $\sigma = \frac{\xi}{s}, K(\sigma) = \frac{\partial(2-4\beta)}{\partial(2+4\beta)}(\sigma-1)_+^{1+a-4}F(a+b,a+c;2+a-4\beta;1-\sigma)$

$$z_+^l = \begin{cases} z^l, z > 0 \\ 0, z \le 0 \end{cases}$$

Если же $-1 < a \le 0, b < c < 1-4\beta$ при $0 < m < 2$, то

$$T\big(\tau(\xi)\big) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\xi} s^{1-4\beta-b}K(\sigma)\tau(s)ds, \qquad (18)$$

Для получения формул (17),(18) была использована методика интегралов с помощью преобразования Меллина.

Аналогично исследованию оператора $T\big(\tau(x)\big)$ рассмотрим оператор

$$T_1\big(\tau(\xi)\big) = \int_0^{\xi}\frac{(I_{0+}^{a_1-a_2,b_1-b_2,a_2+c_1}\tau)dt}{(\xi-t)^{2\beta}}, \qquad (19)$$

Который после смены порядков интегрирования представим в виде

$$T_1\big(\tau(\xi)\big) = \frac{1}{\Gamma(a_1-a_2)}\int_0^{\xi}\tau(s)ds\int_s^{\xi}\big((\xi-t)\big)^{-2\beta}t^{a_2+b_2-a_1-b_1}(t-s)^{a_1-a_2-1}$$
$$\times F\left(a_1+b_1-a_2-b_2,-a_2-c_1;a_1-a_2;1-\frac{s}{t}\right)dt$$

ISSN:
2181-3906
2025

International scientific journal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 4 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

Известно, что

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)$$

Гипергеометрической функции Гаусса дает право записать

$$T_1(\tau(\xi)) = \frac{1}{\Gamma(a_1-a_2)} \int_0^{\xi} \tau(s) s^{a_2+b_2-a_1-b_1} ds \int_s^{\xi} (\xi-t)^{-2\beta} (t-s)^{a_1-a_2-1}$$

$$\times F\left(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; a_1-a_2; \frac{s-t}{s}\right) dt$$

Произведя во внутреннем интеграле замену $t = \xi z, \sigma = \frac{\xi}{s}$, получим

$$T_1(\tau(\xi)) = \frac{1}{\Gamma(a_1-a_2)} \int_0^{\xi} s^{1-2\beta} s^{b_2-b_1-1}\ \tau(s) ds \int_{\frac{1}{\sigma}}^{1} (1-z)^{-2\beta} (\sigma z-1)^{a_1-a_2-1}$$

$$\times F(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; a_1-a_{22}; 1-\sigma z) dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a_1-a_2)} \int_0^{\xi} s^{b_2-b_1-2\beta}\ \tau(s) ds (\sigma)^{1-2\beta} \int_{\frac{1}{\sigma}}^{1} (1-z)^{-2\beta} (\sigma z-1)^{a_1-a_2-1}$$

$$\times F(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_{11}; a_1-a_2; 1-\sigma z) dz$$

Для вычисления внутреннего интеграла введем в рассмотрение функцию

$$K_1(\sigma) = \sigma^{1-2\beta} \int_0^{\infty} f_1(\sigma z) f_2(z) dz$$

Где

$$f_1(\sigma z) = (\sigma z-1)_+^{a_1-a_2-1} F(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; a_1-a_2; 1-\sigma z) dz,$$

$$f_2(z) = (\sigma z-1)_+^{-2\beta}$$

Для нахождения $\mathrm{K}_1(\sigma)$воспользуемся преобразованием Меллина

$$f(x) \leftrightarrow f^*(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1}\, dx$$

Учитывая, что

$$x^{\alpha} \int_0^{\infty} t^{\beta} f_1(xt) f_2(t) dt \leftrightarrow f_1^*(s+\alpha)\, f_2^*(1-s-\alpha+\beta),$$

Имеем $\qquad K_1^*(s) = f_1^*(s+1-2\beta) f_2^*(2\beta-s)$

Теперь, применяя методику интегралов с помощью преобразования Меллина.

$$(x-1)_+^{c-1}F(a,b;c;1-x) \leftrightarrow \Gamma(c)\Gamma\begin{bmatrix}1+a-c-s, & 1+b-c-s\\ 1-s, & 1+a+b-c-s\end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\big(Re>0,\ \ Res<1+Re(a-c);1+Re(b-c)\big);$$

$$(1-x)_+^{c-1} \leftrightarrow \Gamma(c)\Gamma\begin{bmatrix}s\\ s+c\end{bmatrix}, (Rec>0, Res>0),$$

Находим $K_1^*(s)=\Gamma(s)=\Gamma(a_1-a_2)\Gamma(1-2\beta)\Gamma\begin{bmatrix}b_1-b_2+2\beta-s, c_1+a_2+2\beta-s\\ 1-s, a_1+c_1+b_1-b_2+2\beta-s\end{bmatrix}$

Откуда, опираясь на (19), получим

$$K_1(\sigma)=\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+a_1-a_2-2\beta)}(\sigma-1)_+^{a_1-a_2-2\beta} \times F(a_1+b_1-a_2-b_2, a_1+c_1; 1+a_1-a_2-2\beta; 1-\sigma) \quad (21)$$

Тогда

$$T_1\big(\tau(\xi)\big)=\int_0^{\xi} s^{b_2-b_1-2\beta}K_1(\sigma)\tau(s)ds$$

Далее, на основании (10), (19) и (20) можем записать

$$T_2\big(\psi(\xi)\big)=\int_0^{\xi}\frac{(I_{0+}^{a_3-a_2,b_3-b_2,a_2+c_1}\psi)dt}{(\xi-t)^{2\beta}}=\int_0^{\xi} s^{b_2-b_1-2\beta}ж_2(\sigma)\psi(s)ds, \quad (22)$$

где

$$K_2(\sigma)=\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+a_3-a_2-2\beta)}(\sigma-1)_+^{a_3-a_2-2\beta} \times F(a_3+b_3-a_2-b_2, a_3+c_1; 1+a_3-a_2-2\beta; 1-\sigma) \quad (23)$$

Учитывая условия (5), соотношения (16) и (22), получаем

$g(\xi)\in C(\bar{I})\cap C^2(I)$

Принимая во внимание (17)-(21) заключаем, что уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое однозначно и безусловно разрешимо в пространстве $C(\bar{I})$ и его решение $\tau(\xi)\in C^2(I)$

Таким образом, задача A_1 эквивалентно редуцируется к задаче Дарбу для уравнения (2).