

ANIQ INTEGRALNING BA'ZI TATBIQLARI VA ULARNING AMALIY HAMDA ILMIY AHAMIYATI

Laylo Mustofoqulova

Jizzax davlat pedagogika universiteti talabasi.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22050951>

Annotatsiya. Ushbu maqolada aniq integral tushunchasining matematika, geometriya, fizika, mexanika, tibbiyot va iqtisodiyot hamda fan-texnikaning boshqa sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalarni yechishga tatbiqlari ko'rib chiqilgan. Yuzalar, hajmlar, yoy uzunliklari, o'zgaruvchan kuchning bajargan ishi, dorivor moddaning organizmdagi umumiy ta'siri (AUC) va iste'molchi ortiqchaligi kabi kattaliklarni aniq integral yordamida matematik modellash tirish orqali hisoblash usullari amaliy misollar bilan tushuntirib berilgan.

Kalit so'zlar: aniq integral, integral yig'indi, egri chiziqli trapetsiya, qutb koordinatalari, yoy uzunligi, aylanma jism, mexanik ish, iste'molchi ortiqchaligi, farmakokinetika.

Annotation. This article examines several applications of the definite integral in solving problems arising in mathematics, geometry, physics, mechanics, medicine, economics and other fields of science and technology. Methods for computing areas, volumes, arc lengths, work done by a variable force, the total drug exposure in an organism (AUC), and consumer surplus are illustrated with worked examples based on mathematical modelling using the definite integral.

Key words: definite integral, integral sum, curvilinear trapezoid, polar coordinates, arc length, solid of revolution, mechanical work, consumer surplus, pharmacokinetics.

Kirish

Matematika kursining eng muhim bo'limlaridan biri bo'lgan aniq integral tushunchasi nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy masalalarni yechishda ham ulkan ahamiyatga ega. XVII asrda I. Nyuton va G. Leybnits tomonidan asos solingan integral hisobi nafaqat matematik muammolarni yechish vositasi, balki real dunyoning tabiat hodisalari va dinamik jarayonlarini chuqur anglash vositasi hamdir.

Aniq integral yordamida turli amaliy kattaliklarni, masalan, bosib o'tilgan yo'l, mexanik ish, elektr zaryadi kabi o'zgaruvchan miqdorlarni muvaffaqiyatli hisoblash mumkin. Geometrik masalalarda u murakkab shakllarning yuzasi va hajmini mukammal o'lchashni ta'minlaydi.

Iqtisodiyotda u umumiy daromad va iste'molchi ortiqchaligini hisoblashda, uzoq muddatli investitsiya va daromadlar oqimini modellash tirishda qo'llaniladi; tibbiyot va biologiyada esa dori vositalarining organizmdagi konsentratsiyasini va biologik jarayonlar dinamikasini aniqlashda keng foydalaniladi. Ushbu maqolada aynan shu yo'nalishlarning har biridan konkret hisoblangan misol keltirilib, aniq integralning amaliy qo'llanilishi ko'rsatib beriladi.

1 Aniq integralning ta'rifi (integral yig'indi)

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu kesmani quyidagi nuqtalar yordamida n ta bo'lakka ajratamiz:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

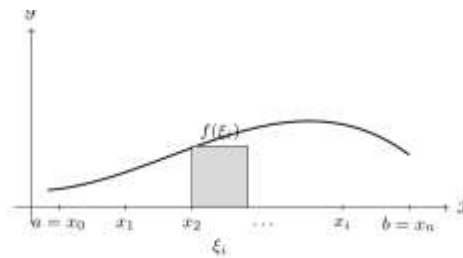
Har bir qism kesmaning uzunligini $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) deb belgilaymiz. Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ bo'lakchadan ixtiyoriy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqtani tanlab, funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(\xi_i)$ ni hisoblaymiz va uni mos ravishda Δx_i ga ko'paytirib, quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

Ushbu yig'indi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi integral yig'indisi (yoki Riman yig'indisi) deyiladi.

Agar qism kesmalarining eng kattasi $\lambda = \max(\Delta x_i) \rightarrow 0$ ga intilganda integral yig'indining chekli limiti mavjud bo'lib, u kesmani bo'lish usuliga hamda ξ_i nuqtalarni tanlashga bog'liq bo'lmasa, bu limitga $f(x)$ funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (2)$$



Rasm 1. Kesmani bo'laklash va integral yig'indini tuzish: har bir $[x_{i-1}, x_i]$ bo'lakchada ξ_i nuqta tanlanib, $f(\xi_i)\Delta x_i$ to'rtburchak yuzlari yig'iladi.

2 Aniq integralning geometrik tatbiqlari

2.1 Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va $f(x) \geq 0$ bo'lsa, yuqoridan $y = f(x)$ grafigi bilan, yon tomonlardan $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan, pastdan esa Ox o'qi bilan chegaralangan shakl *egri chiziqli trapetsiya* deyiladi. Uning yuzi quyidagi formula bilan topiladi:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, shakl Ox o'qidan pastda joylashadi va yuzi manfiy bo'lmagan qiymat bo'lishi uchun integral oldiga minus ishorasi qo'yiladi:

$$S = - \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Agar geometrik shakl yuqoridan $y = f(x)$ va pastdan $y = g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$) uzluksiz chiziqlar hamda $x = a$, $x = b$ vertikal to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, uning yuzi quyidagiga teng:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (5)$$

2.2 Qutb koordinatalar sistemasida yuzani hisoblash

Qutb koordinatalarida $r = r(\varphi)$ tenglama hamda $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ nurlar bilan chegaralangan qutb sektorining yuzi integral yig'indi limiti ko'rinishida keltirib chiqariladi va quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (6)$$

Misol (kardioida yuzini hisoblash). $r = a(1 + \cos \varphi)$ kardioida chizig'i bilan chegaralangan shaklning to'liq yuzini toping ($a > 0$).

Yechish. Shakl Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun integralni 0 dan π gacha hisoblab, natijani 2 ga ko'paytiramiz:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2(1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi.$$

Darajani pasaytirish formulasidan foydalanamiz:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

U holda:

$$S = a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = a^2 \left[\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

$$\text{Javob: } S = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

2.3 Silliqlik egri chiziqli yoyining uzunligi

Agar to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida sillikli chiziqli yoy $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa ($a \leq x \leq b$), uning yoy uzunligi l quyidagi integral yordamida hisoblanadi:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (7)$$

Misol. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$ egri chiziqli yoyining $x \in [0, 8/9]$ segmentdagi uzunligini toping.

Yechish. Avvalo funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Yoy uzunligi formulasiga qo'yish uchun ifodani soddalashtiramiz:

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{(x+1)^2}{1-x^2} = 1 + \frac{x+1}{1-x} = \frac{2}{1-x}.$$

U holda integral quyidagi ko'rinishga keladi:

$$l = \int_0^{8/9} \sqrt{\frac{2}{1-x}} dx = \sqrt{2} \int_0^{8/9} (1-x)^{-1/2} dx = \sqrt{2} \left[-2(1-x)^{1/2} \right]_0^{8/9}.$$

$$l = -2\sqrt{2} \left(\sqrt{1-\frac{8}{9}} - \sqrt{1} \right) = -2\sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = -2\sqrt{2} \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Javob: } l = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Agar egri chiziq parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), u holda yoy uzunligi:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (8)$$

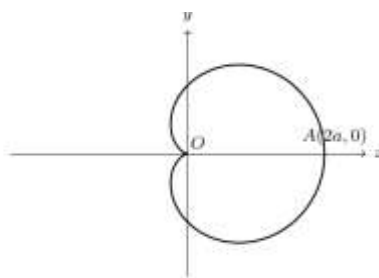
2.4 Aylanma sirtning yuzasi va aylanma jism hajmi

$y = f(x)$ uzluksiz chiziq, $x = a$, $x = b$ to'g'ri chiziqlar va Ox o'qi bilan chegaralangan egri chizikli trapetsiyaning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi V_x quyidagicha topiladi:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (9)$$

$y = f(x)$ silliq chiziqning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzasi S_x ushbu formula yordamida aniqlanadi:

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (10)$$



Rasm 2. $r = a(1 + \cos \varphi)$ kardioidasi.

3 Aniq integralning mexanika va fizikaga tatbiqlari

Aniq integral o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini topishda asosiy vositadir. Moddiy nuqta Ox o'qi bo'ylab o'zgaruvchan $F = F(x)$ kuch ta'siri ostida a nuqtadan b nuqtaga ko'chirilganda, bajarilgan mexanik ish A quyidagi integral yordamida aniqlanadi:

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (11)$$

Bu formula integral yig'indilar prinsipidan kelib chiqadi: $[a, b]$ kesma kichik Δx_i bo'lakchalarga ajratiladi, har bir kichik bo'lakda kuch o'zgarmas $F(\xi_i)$ deb qabul qilinadi, so'ngra elementar ishlar yig'ilib limitga o'tiladi:

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx.$$

Misol. Prujinani 0,08 m (8 sm) cho'zish uchun 60 N kuch talab etiladi. Shu prujinani cho'zishda bajariladigan ishni toping.

Yechish. Guk qonuniga ko'ra $F(x) = kx$, bunda $F = 60$ N, $x = 0,08$ m bo'lgani uchun:

$$k = \frac{60}{0,08} = 750 \text{ N/m}.$$

Demak $F(x) = 750x$, va bajarilgan ish (11) formula bo'yicha:

$$A = \int_0^{0,08} 750x dx = 750 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,08} = \frac{750 \cdot (0,08)^2}{2} = 2,4 \text{ J}.$$

$$\text{Javob: } A = 2,4 \text{ J}.$$

4 Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari

Iqtisodiy jarayonlarda ko'plab kattaliklar (daromad, xarajat, foyda) marjinal, ya'ni o'zgarish tezligi ko'rinishida beriladi. Agar x ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi bo'lsa va $R'(x)$ marjinal daromad funksiyasi ma'lum bo'lsa, $x = a$ dan $x = b$ gacha ishlab chiqarishda olinadigan umumiy daromadning o'zgarishi

$$\Delta R = \int_a^b R'(x) dx \quad (12)$$

formulasi bilan topiladi.

Misol (umumiy foyda). Korxonaning marjinal foyda funksiyasi $P'(x) = 30 - 0,2x$ (ming so'm/dona) ko'rinishida berilgan. Mahsulotni 0 donadan 50 donagacha ishlab chiqarishda olinadigan umumiy foydani toping.

Yechish. (12) formulaga asosan:

$$P = \int_0^{50} (30 - 0,2x) dx = \left[30x - 0,1x^2 \right]_0^{50} = 30 \cdot 50 - 0,1 \cdot 50^2 = 1500 - 250 = 1250 \text{ ming so'm}.$$

Javob: 50 dona mahsulot ishlab chiqarishdan olingan umumiy foyda 1250 ming so'mni tashkil etadi.

Aniq integralning yana bir muhim iqtisodiy tatbiqi – *iste'molchi ortiqchaligini* (consumer surplus) hisoblashdir.

Agar $p = p(x)$ talab funksiyasi ma'lum bo'lib, bozor muvozanati (x_0, p_0) nuqtada o'rnatilgan bo'lsa, iste'molchi ortiqchaligi

$$CS = \int_0^{x_0} p(x) dx - x_0 p_0 \quad (13)$$

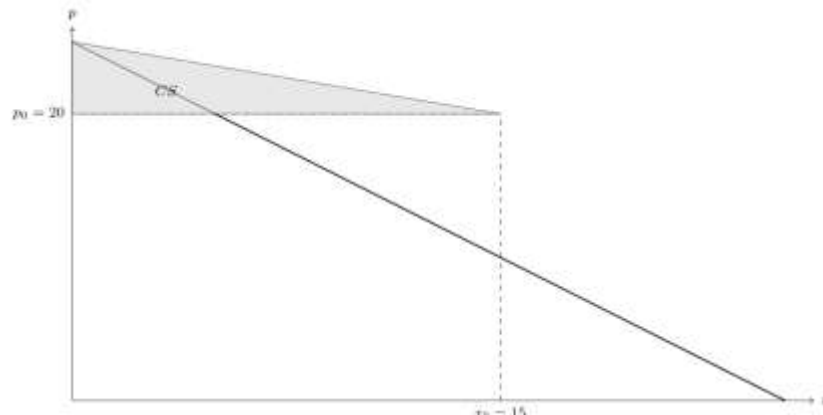
formulasi bilan aniqlanadi – bu iste'molchilar to'lashga tayyor bo'lgan narx bilan bozorda haqiqatda to'lagan narx o'rtasidagi umumiy farqni bildiradi.

Misol. Talab funksiyasi $p(x) = 50 - 2x$ ko'rinishida bo'lib, bozor muvozanat nuqtasida $x_0 = 15$, $p_0 = 20$ ekani ma'lum. Iste'molchi ortiqchaligini toping.

Yechish. (13) formulaga asosan:

$$CS = \int_0^{15} (50 - 2x) dx - 15 \cdot 20 = \left[50x - x^2 \right]_0^{15} - 300 = (750 - 225) - 300 = 225.$$

Javob: $CS = 225$ pul birligi.



Rasm 3. $p(x) = 50 - 2x$ talab chizig'i ostida joylashgan bo'yalgan uchburchak shakl – iste'molchi ortiqchaligi CS ni ifodalaydi.

5 Aniq integralning tibbiyot va biologiyaga tatbiqlari

Farmakokinetikada (dori vositalarining organizmda tarqalishini o'rganuvchi fanda) dori qabul qilingandan so'ng uning qondagi konsentratsiyasi $C(t)$ vaqt o'tishi bilan o'zgarib boradi.

Dorining organizmga umumiy ta'sirini baholash uchun konsentratsiya-vaqt egri chizig'i ostidagi yuza (Area Under the Curve, AUC) hisoblanadi:

$$AUC = \int_0^T C(t) dt. \quad (14)$$

Bu kattalik dorining terapevtik samaradorligini va xavfsiz dozani belgilashda muhim ko'rsatkich hisoblanadi.

Misol. Dori qabul qilingandan keyin qondagi konsentratsiya $C(t) = 50e^{(-0,2t)}$ (mg/l) qonuniyati bo'yicha kamayib boradi, bunda t soatlarda o'lchanadi. Dastlabki 10 soat davomidagi AUC ni toping.

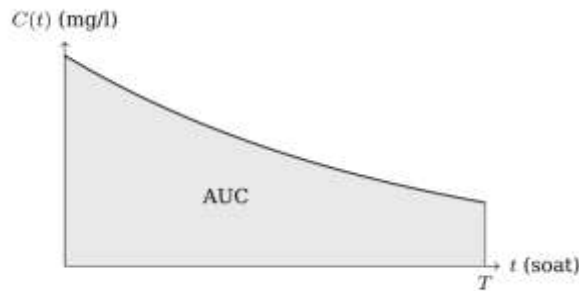
Yechish. (14) formulaga asosan:

$$AUC = \int_0^{10} 50e^{-0,2t} dt = 50 \left[-\frac{1}{0,2} e^{-0,2t} \right]_0^{10} = -250(e^{-2} - 1) = 250(1 - e^{-2}).$$

$e^{-2} \approx 0,1353$ ekanini hisobga olsak,

$$AUC \approx 250 \cdot 0,8647 \approx 216,2 \text{ mg}\cdot\text{soat/l}.$$

Javob: $AUC \approx 216,2 \text{ mg}\cdot\text{soat/l}.$



Rasm 4. $C(t) = 50e^{(-0,2t)}$ konsentratsiya egri chizig'i ostidagi yuza (AUC).

Xuddi shunga o'xshash yondashuv biologiyada populyatsiya sonining o'sish tezligi $N'(t)$ ma'lum bo'lganda, $[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida populyatsiyaning umumiy o'sishini

$$\Delta N = \int_{t_1}^{t_2} N'(t) dt$$

integral yordamida topishda ham qo'llaniladi.

Xulosa

Aniq integral nazariyasi matematikaning markaziy bo'limlaridan biri bo'lib, u faqat nazariy mavhum tushuncha emas, balki geometriya, mexanika, fizika, iqtisodiyot va tibbiyot kabi ko'plab amaliy sohalarida real masalalarni yechishning kuchli vositasi hisoblanadi.

Maqolada ko'rib chiqilgan egri chiziqli trapetsiya yuzini, qutb sektorining yuzini, yoy uzunligini, aylanma jism hajmi va sirt yuzasini, mexanik ishni, korxona foydasi va iste'molchi ortiqchaligini, hamda dori vositasining organizmdagi umumiy ta'sirini (AUC) hisoblash misollari aniq integralning turli fanlardagi amaliy ahamiyatini yaqqol namoyish etadi.

Bu usullarni puxta egallash texnika, iqtisodiyot, tibbiyot va tabiiy fanlarning turli masalalarini matematik modellashtirish va yechishda muhim ko'nikma hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Fixtengolts G.M. Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya. Tom 2. – M.: Nauka, 1981.
2. Piskunov N.S. Differensialnoye i integralnoye ischisleniya dlya vtuzov. Tom 1. – M.: Nauka, 1985.
3. Tojiyev Sh. Oliy matematika ma'ruzalar kursi. – Toshkent: O'qituvchi, 2004.

4. Azlarov T.A., Mansurov H. Matematik analiz. 1-qism. – Toshkent: O'zbekiston, 1994.
5. Hughes-Hallett D., Gleason A.M. va boshq. Calculus: Single and Multivariable. – 7th ed. – Wiley, 2017. (Iqtisodiyot va tibbiyotga oid tatbiqlar bo'yicha.)