TO'PLAMNING JORDAN O'LCHOVI VA UNGA OID MISOLLAR

Juraboyeva Shoxida Nazmiddinovna
TMC instituti "Amaliy matematika va informatika" kafedrasi o'qituvchisi.

https://doi.org/10.5281/zenodo.11428900

Annotatsiya. *Mazkur maqola matematik to'plamlar va ularga oid o'lchov nazariyasi, xususan, Jordan o'lchovi haqida so'z yuritadi. Jordan o'lchovi, Lebeg o'lchoviga nisbatan oddiyroq bo'lib, ko'plab matematik va amaliy sohalarda qo'llaniladi. Maqolada Jordan o'lchovi asoslari, uning matematik xususiyatlari va qo'llanilish sohalari keng yoritilgan. Shuningdek, Jordan o'lchovi bilan bog'liq misollar tahlil qilinadi va o'quvchilarga mukammal tushuncha berishga yordam beradi. Ushbu maqola matematik o'lchov nazariyasiga qiziqqan talaba va matematiklarga mo'ljallangan bo'lib, ularni Jordan o'lchovi haqida chuqurroq bilimga ega qilishni maqsad qilgan.*

Kalit so'zlar: *To'plam, Jordan o'lchovi, O'lchov nazariyasi, Matematik xususiyatlar, Lebeg o'lchovi.*

JORDAN SIZE OF THE COLLECTION AND EXAMPLES OF IT

Abstract. *This article is about mathematical sets and related measure theory, in particular Jordan's measure. The Jordan measure is simpler than the Lebesgue measure and is used in many mathematical and practical fields. The article covers the basics of the Jordan scale, its mathematical properties and fields of application. Also, examples related to Jordan's scale are analyzed and help to give a perfect understanding to the students. This article is intended for students and mathematicians who are interested in the theory of mathematical measurement, and aims to provide them with a deeper knowledge of Jordan's measurement.*

Key words: *Set, Jordan measure, Measure theory, Mathematical properties, Lebesgue measure.*

ИОРДАНИЯ РАЗМЕР КОЛЛЕКЦИИ И ПРИМЕРЫ ЕЕ

Аннотация. *Эта статья посвящена математическим множествам и связанной с ними теории меры, в частности мере Жордана. Мера Жордана проще меры Лебега и используется во многих математических и практических областях. В статье рассмотрены основы шкалы Жордана, ее математические свойства и области применения. Также анализируются примеры, относящиеся к шкале Джордана, которые помогают студентам лучше понять ее. Эта статья предназначена для студентов и математиков, интересующихся теорией математического измерения, и призвана дать им более глубокие знания об измерении Джордана.*

Ключевые слова: *множество, жорданова мера, теория меры, математические свойства, мера Лебега.*

Matematik o'lchovlar Biz aksariyat adabiyotlarda, darsliklarda Lebeg manosidagi o'lchovli to'plamlar va ularni xossalari haqida yetarlicha ma'lumotlarga egamiz [1-2]. Ammo boshqa o'lchovlar va ularning xossalari haqida ma'lumotlar juda kam [2-4]. Bu maqolada Jordan o'lchovi hamda to'plamning Jordan manosidagi o'lchovini hisoblash haqida bir nechta misollar keltirilgan.

$E \subset R$ to'plam Jordan manosida o'lchovli to'plam bo'lishi uchun E to'plamni o'z ichiga oluvchi biror $F_1 = [a; b]$ kesma olinadi ($[a; b]$ kesmaning Jordan o'lchovi $b-a$ ga teng deb qabul qilamiz). Keyin esa, L_1, l_1 sonlar aniqlanadi. Keyingi qadamda $F_1=[a;b]$ teng ikkita kesmaga ajratiladi va L_2, l_2 sonlar aniqlanadi. Bu jarayon huddi shunday davom ettiriladi. *n*-qadamda $F_1=[a;b]$ to'plam teng 2^{n-1} ta kesmaga bo'linib L_n, l_n sonlar aniqlanadi. Bu yerda L_n *n*-qadamda E to'plamning kamida elementi qatnashgan kesmachalar sonini kesmachaning uzunligiga ko'paytirishdan hosil bo'lgan songa teng. l_n esa, *n*-qadamda barcha elementlari E to'plamning elementlaridan tashkil topgan kesmachalar sonini kesmachaning uzunligiga ko'paytirishdan hosil bo'lgan songa teng. Natijada $\{L_n\}$ va $\{l_n\}$ sonli ketma-ketliklar hosil bo'ladi. Agar bu ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib ularning limitlari teng bo'lsa, u holda E to'plam Jordan manosida o'lchovli to'plam deyiladi, aks holda E to'plam Jordan manosida o'lchovli to'plam emas deyiladi.

Biz quyida bir nechta misollar yordamida to'plamlarning Jordan manosida o'lchovli yoki o'lchovli emasligini ko'rsatamiz.

1-misol. $E=(a;b)$ intervalning Jordan o'lchovini hisoblang.

Yechish. $(a;b)$ to'plamni o'z ichiga oluvchi $F_1=[a;b]$ kesmani olamiz. $F_1=[a;b]$ kesmaning Jordan o'lchovi $b-a$ ga teng. F_1 to'plamning elementlari ichida kamida bitta E to'plamning elementi tegishli bo'lganligi uchun $L_1=b-a$ ga, F_1 to'plamning barcha elementlari E to'plamning elementlaridan iborat bo'lmaganligi uchun $l_1=0$ ga teng. Ikkinchi qadanda o'lchovi $\frac{b-a}{2}$ ga teng bo'lgan ikkita $F_2^1=\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ va $F_2^2=\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ to'plamlarni qaraymiz. F_2^1, F_2^2 to'plamlarning elementlari ichida kamida bitta E to'plamning elementi bo'lganligi uchun $L_2=2\cdot\frac{b-a}{2}=b-a$ ga, F_2^1, F_2^2 to'plamlarning barcha elementlari E to'plamning elementlaridan iborat bo'lmaganligi uchun $l_1=0$ ga teng. Keyingi qadamlarda,

$$L_3=4\cdot\frac{b-a}{4}=b-a,\ l_3=2\cdot\frac{b-a}{4}=\frac{b-a}{2}$$

$$L_4=8\cdot\frac{b-a}{8}=b-a,\ l_4=6\cdot\frac{b-a}{8}=\frac{3(b-a)}{4}$$

$$\dots\dots$$

$$L_n=2^n\cdot\frac{b-a}{2^n}=b-a,\ l_n=(2^n-2)\cdot\frac{b-a}{2^n}=b-a-\frac{b-a}{2^{n-1}},\ n\geq 3$$

$$\dots\dots$$

ekanligini topamiz.

Jordan o'lchovi tarifiga ko'ra, *n* cheksizga intilganda limitga o'tib $(a;b)$ intervalning Jordan o'lchovi $b-a$ ga teng ekanligi kelib chiqdi.

Bu misoldan shuni xulosa qilishimiz mumkinki, $[a;\, b]$ kesma, $[a;\, b)$, $(a;\, b]$ yarim intervallarning Jordan o'lchovi ham $b-a$ ga teng bo'ladi.

2-misol. Ushbu $E=(-2;\,1]\cup[2;\,4]\cup\{6\}$ to'plamning Jordan o'lchovini hisoblang.

Yechish. E to'plamni o'z ichiga oluvchi $F_1=[-2;\,6]$ to'lamni qaraymiz. $F_1=[-2;\,6]$ to'plamning Jordan o'lchovi 8 ga teng. F_1 to'plamning elementlari ichida kamida bitta E to'plamning elementi tegishli bo'lganligi uchun $L_1=8$ ga, F_1 to'plamning barcha elementlari E to'plamning elementlaridan iborat bo'lmaganligi uchun $l_1=0$ ga teng.

Endi o'lchovi 4 ga teng bo'lgan ikkita $F_2^1=[-2;\,2]$ va $F_2^2=[2;\,6]$ to'plamlarni olamiz. $F_2^1\cap E\neq\varnothing,\ F_2^2\cap E\neq\varnothing$ ekanligidan $L_2=2\cdot4=8$ ga teng bo'ladi. $F_2^1\not\subset E,\ F_2^2\not\subset E$ ekanligidan $l_2=0\cdot4=0$ ga teng ekanligini topamiz.

Keyingi qadamda o'lchovi 2 ga teng bo'lgan to'rtta $F_3^1=[-2;\,0]$, $F_3^2=[0;\,2]$, $F_3^3=[2;\,4]$, $F_3^4=[4;\,6]$ to'plamlarni olamiz. E to'plam barcha to'rtta to'plamning har biri bilan kesishmasi bo'sh bo'lmaganligi uchun $L_3=4\cdot2=8$ ga teng. To'rtta to'plamdan $F_3^3=[2;\,4]$ to'plam E to'plamning qism to'plami bo'lganligi uchun $l_3=1\cdot2=2$ ga teng bo'ladi.

O'lchovi 1 ga teng bo'lgan $F_4^1=[-2;-1]$, $F_4^2=[-1;\,0]$, $F_4^3=[0;\,1]$, $F_4^4=[1;\,2]$, $F_4^5=[2;\,3]$, $F_4^6=[3;\,4]$, $F_4^7=[4;\,5]$, $F_4^8=[5;\,6]$ to'plamlar uchun yuqoridagi mulohazalar yuritib $L_4=8\cdot1=8$ va $l_4=4\cdot1=4$ bo'lishini topamiz.

Keyingi qadamda o'lchovi 0,5 ga teng bo'lgan 16 ta to'plamni E to'plam bilan tekshirib chiqamiz. Natijada $L_5=14\cdot0{,}5=7$ va $l_5=9\cdot0{,}5=4{,}5$ bo'ladi. Navbatdagi qadamda o'lchovi 0,25 ga teng 32 ta to'plamni tekshirib, $L_6=24\cdot0{,}25=6$ va $l_6=19\cdot0{,}25=4{,}75$ ekanligini hisoblaymiz.

n-qadamda uzunligi 2^{4-n} ga teng bo'lgan 2^{n-1} ta to'plamni E to'plam bilan tekshirib chiqamiz. Buning natijada, $L_n=(2\cdot L_{n-1}\cdot2^{n-5}-4)\cdot2^{4-n},\ n\geq6$ va $l_n=(2\cdot l_{n-1}\cdot2^{n-5}+1)\cdot2^{4-n},\ n\geq6$ ekanligi kelib chiqadi. Ushbu rekurent formula

$$L_n=L_{n-1}-2^{6-n},\ l_n=l_{n-1}+2^{4-n},\ n\geq6$$

va $L_5=7,\ l_5=4{,}5$ ekanligidan

$$L_n=L_5-2^{6-n}-2^{5-n}-\ldots-2^0,\quad l_n=l_5+2^{4-n}+2^{3-n}+\ldots+2^{-2}$$

bo'lishini topamiz. Bularni soddalashtirib,

$$L_n=5+2^{6-n},\quad l_n=5-2^{4-n}$$

ketma-ketliklarni umumiy hadini aniqlaymiz.

Natijada, $L_n = 5 + 2^{6-n},\ n \geq 6$ kamayuvchi, $l_n = 5 - 2^{4-n},\ n \geq 6$ o'suvchi va $L_n > l_n,\ n \in N$ shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketliklarni hosil qilamiz. Bu ketma-ketliklar yaqinlashuvchi. n cheksizga intilganda ketma-ketliklarni limitini hisoblab,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}(5 + 2^{6-n}) = 5$$

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty}(5 - 2^{4-n}) = 5$$

ekanligini topamiz.

Jordan o'lchovi tarifiga ko'ra, $E = (-2;\,1] \cup [2;\,4] \cup \{6\}$ to'plamning o'lchovi 5 ga teng ekan.

Endi Jordan manosida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol keltiramiz.

3-misol. Ushbu $E = [0;\,1] \cap Q$ ($[0;\,1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar) to'plamning Jordan o'lchovini hisoblang.

Yechish. Birinchi E to'plamni o'z ichiga oluvchi $F_1 = [0;\,1]$ to'lamni qaraymiz. $F_1 = [0;\,1]$ to'plamning elementlari ichida E to'plamning elementlari bo'lganligi uchun $L_1 = 1$ ga, F_1 to'plamning barcha elementlari E to'plamning elementlaridan iborat bo'lmaganligi uchun $l_1 = 0$ ga teng. Ikkinchi qadamda $F_2^1 = [0;\,0{,}5]$ va $F_2^2 = [0{,}5;\,1]$ to'plamlarning elementlari ichida E to'plamning elementlari bo'lganligi uchun $L_2 = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ ga, F_2^1 va F_2^2 to'plamning barcha elementlari E to'plamning elementlaridan iborat bo'lmaganligi uchun $l_2 = 0$ ga teng bo'ladi. Ratsional sonlar zichlik xossasiga ko'ra, keyingi qadamlarda ham $L_n = 1$ ga va $l_n = 0$ ga teng ekanligini osongina ko'rsatish qiyin emas.

$\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 1$ va $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 0$ ekanligidan Jordan o'lchovi tarifiga ko'ra $E = [0;\,1] \cap Q$ to'plamning Jordan o'lchovi mavjud emasligi kelib chiqadi.

Bizga ma'lumki, $E = [0;\,1] \cap Q$ to'plamning Lebeg o'lchovi 0 ga teng. Ushbu $E = [0;\,1] \cap Q$ to'plam Lebeg manosida o'lchovli va Jordan monasida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol bo'lar ekan.

REFERENCES

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализу. Москва: Наука. 1989.
2. Sarimsoqov T.A. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Toshkent: Fan. 1994.
3. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi. Toshkent: O'qituvchi. 1986.
4. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev. Funksiyalar nazariyasi. Toshkent. 2004.
5. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, I.A. Ikromov, Funksional analizdan masalalar to'plami. I qism Lebeg integrali. Toshkent: Turon-Iqbol. 2013