ISSN: 2181-3906 2024

International scientifijournal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

IXTIYORIY CHIZIQLI CHEGARAVIY SHARTLARDA ISSIQLIK VA MASSA KO'CHISHI MASALASINI YECHISH UCHUN TO'G'RI CHIZIQLAR USULI

Eshmurodov Mas'udjon Xikmatillayevich
Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti, 140147, Samarqand, Uzbekistan.
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0005-0667-8116
masudeshmurodov@samdaqu.edu.uz, +998933501484.
Shaimov Komiljon Mirzakabulovich
Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti, 140147, Samarqand, Uzbekistan.
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0005-8279-4530
shaimovkomiljon@gmail.com, +998937228187.
https://doi.org/10.5281/zenodo.11113246

Annotatsiya. *Ixtiyoriy chiziqli chegaraviy shartlarga ega masalani Dirixle masalasiga keltirish yo'li bilan to'g'ri chiziqlar usulini qo'llash usuli ishlab chiqilgan. Issiqlik va massa almashinuvi masalalarini hal qilishda eng ko'p foydalaniladigan usul chekli ayirmalar usuli hisoblanadi Funktsiyaning faraz qilingan qiymatlarini chegara tugunlarida funktsiyaning yangi topilgan qiymatlari bilan chegara shartlarining yaqinlashuvlariga muvofiq ravishda moslashtirish orqali izlanayotgan funktsiyalarning chegaralardagi haqiqiy qiymatlari topiladi. Keyin ular tenglama va bitta koordinata uchun chegaraviy shartlar yaqinlashishi ikkinchi tartibini ta'minlagan holda to'g'ri chiziqlar usulini amalga oshirishda foydalanildi.*

Kalit so'z: *To'g'ri chiziqlar usuli; Issiqlik va massa ko'chishi masalasi; Dirixle masalasi; To'r funksiya.*

METHOD OF STRAIGHT LINES FOR SOLVING THE PROBLEM OF HEAT AND MASS TRANSFER UNDER ARBITRARY LINEAR BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. *A method of applying the method of straight lines is developed by reducing the problem with arbitrary linear boundary conditions to the Dirichlet problem. The most widely used method for solving heat and mass transfer problems is the finite difference method. By matching the assumed values of the function at the boundary nodes with the newly found values of the function in accordance with the approximations of the boundary conditions, the true values of the sought functions at the boundaries are found. They were then used to implement the method of straight lines, providing a second-order approximation of the equation and the boundary conditions for one coordinate.*

Key word: *Method of straight lines; The issue of heat and mass transfer; Dirichlet problem; Mesh function.*

МЕТОД ПРЯМЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. *Разработан метод применения метода прямых путем преобразования задачи с произвольными линейными граничными условиями в задачу Дирихле. Наиболее широко применяемым методом решения задач тепломассопереноса является метод конечных разностей путем сопоставления предполагаемых значений функции в граничных узлах с вновь найденными значениями функции в соответствии с аппроксимациями границы. условиях находятся истинные значения искомых функций на границах. Затем с их* *помощью был реализован метод прямых, обеспечивающий аппроксимацию второго порядка уравнения и граничных условий по одной координате.*

Ключевые слова: *Метод прямых; Вопрос тепломассообмена; задача Дирихле; Функция сетки.*

KIRISH: Dirixle masalasiga keltirish bilan ikkinchi va uchinchi turdagi chegaraviy shartlari bo‘lgan parabolik tenglamani yechishda to‘g‘ri chiziqlar usulini qo‘llash usulini taklif qilamiz. U ayniqsa, chegara shartlari turli chegarada (chiziq yoki to‘g‘ri to‘rtburchakda) har xil bo‘lganda, qo‘shma chegaraviy shartlarda foydalidir. Izlanayotgan funksiyaning qiymatlari chegaralarda berilgan deb faraz qilib, Dirixle masalasini yechish amalga oshiriladi. Funksiyaning faraz qilingan qiymatlarini chegara tugunlarida funksiyaning yangi topilgan qiymatlari bilan chegara shartlarining yaqinlashuvlariga muvofiq ravishda moslashtirish orqali izlanayotgan funksiyalarning chegaralardagi haqiqiy qiymatlari topiladi.

Keyin ular tenglama va bitta koordinata uchun chegaraviy shartlar approksimatsiyasi ikkinchi tartibni ta’minlagan holda to‘g‘ri chiziqlar usulini amalga oshirishda foydalanildi. Algoritm tavsifini chalkashtirib yubormaslik uchun usulni qo‘llash obyekti sifatida bir o‘lchovli bir jinsli bo‘lmagan parabolik tenglama qabul qilinadi, asosiy omillar esa klassik issiqlik uzatish nazariyasi doirasida izohlandi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA USULLAR. Usulning mohiyati quyidagicha [1; 3-10 b.]. Dastlab izlanayotgan funksiyaning chegaraviy qiymatlari berilgan deb faraz qilish bilan masala yechiladi. Keyin izlanayotgan funksiyaning faraz qilingan chegaraviy va yangi topilgan chegaraviy qiymatlari o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanishlar chegaraviy shartlarga muvofiq tuziladi.

MUHOKAMA VA XULOSA: Ushbu usulning umumiy ma’nosi Dirixle masalasi uchun to‘g‘ri chiziqlar usulining algoritmidan foydalanib chegaradagi shartlar ikkinchi, uchinchi turli bo‘lgan holga qo‘llash mumkin.

NATIJA: Ushbu munosabatlardan Dirixle masalasi doirasidagi to‘g‘ri chiziqlar usuli bilan amalga oshiriladigan funksiyaning chegaraviy qiymatlari aniqlanadi. Usul tenglama va chegaraviy shartlar chiziqli bo‘lmaganda ham qo‘llanilishi mumkin.

KIRISH

Bugungi kunda energiya resurslari va uy-joy kommunal xizmatlari uchun tariflar narxining uzluksiz o‘sib borishi bilan issiqlik ta’minoti tizimlarining samaradorligini oshirish muammolarini hal etish masalalarining yechimiga bo‘lgan e’tibor ortib bormoqda. Bunday masalalarning yechimida sonli usullar alohida ahamiyat kasb etmoqda. Bugungi kunda sonli usullar fenomenologik va stoxastik usullarni to‘ldirib, bilish nazariyasining asosiy elementiga aylanib bormoqda. U katta hajmli ma’lumotlarni qayta ishlash va tahlil etishga, jumladan ko‘p o‘lchovli xususiy hosilali chiziqli va chiziqsiz tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga keng qo‘llanilmoqda. Hozirda konveksiya – diffuziya – reaksiya turidagi chiziqli va chiziqsiz tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga yo‘naltirilgan sonli usullar rivojlantirilmoqda va ular moddiy nuqta va tutash muhit mexanikasi, tibbiyot, fizika, kimyo, energetika, logistika, neft va gaz sanoati kabi iqtisodiyot va fan sohalarining masalalariga joriy etilmoqda.

METOD

Issiqlik uzatish tenglamasi quyidagicha shaklda qabul qilinadi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f\left(x,t\right)$$

Haroratning boshlang‘ich taqsimoti $T\left(x,0\right) = T^0(x),$ va shartlar berilgan deb faraz qilamiz: $T\left(0,t\right) = \mu_0\left(t\right)$, $T\left(l,t\right) = \mu_l\left(t\right)$.

Dirixle masalasi shu tarzda qo‘yiladi. Shartning o‘ng tomonidagi $\mu_0(t)$ va $\mu_l(t)$ funksiyalar boshqa chegaraviy shartlar uchun qiymatlari keyin aniqlanadigan miqdorlar hisoblanadi.

Tekis to‘r $\omega_x = \left(x_i = ih, \;\; i = 0,1,...,N,N+1; \;\; h = \dfrac{l}{N+1} \right)$, $u_i(t)$ va $f_i(t)$ to‘r funksiyalari kiritildi.

Hisoblash sohasi to‘rining ichki tugunlarida tenglama x koordinatasi bo‘yicha ikkinchi tartib aniqlikda approksimatsiyalandi [1; 464(I-qism) b., 360(II-qism) b.]:

$$\frac{du_i^{n+1}}{dt} = \frac{a^2}{h^2}\left(u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}\right) + f_i^{n+1}.$$

Bunday holda chegara tugunlarida faraz qilingan μ_0^{n+1} va μ_l^{n+1} chegaraviy shartlari qanoatlantiriladi:

$$\frac{du_1^{n+1}}{dt} = \frac{a^2}{h^2}\left(\mu_0^{n+1} - 2u_1^{n+1} + u_2^{n+1}\right) + f_1^{n+1},$$

$$\frac{du_N^{n+1}}{dt} = \frac{a^2}{h^2}\left(u_{N-1}^{n+1} - 2u_N^{n+1} + \mu_l^{n+1}\right) + f_N^{n+1}.$$

Taqdim yetilgan differensial-ayirmali tenglamalardan biz

$$\frac{dU}{dt} = \frac{a^2}{h^2} AU + F \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi matritsa tenglamani tuzamiz, bu yerda

$$U = \left(u_1^{n+1},\; u_2^{n+1},...,\; u_{N-1}^{n+1},\; u_N^{n+1}\right)^*,$$

$$A = \left\| a_{p,q} \right\|_N = \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & & ... & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -2 \end{matrix} \right\|_N ,$$

$$F = \left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_0^{n+1},\; f_2^{n+1},...,\; f_{N-1}^{n+1},\; f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_l^{n+1} \right)^*.$$

Bu yerda izlanayotganlar va matritsa elementlari indekslari 1 dan N gacha o‘zgaradi, yuqoridagi "*" belgi matritsani transponirlash amalini bildiradi. Tenglama (1) alohida

ISSN: 2181-3906
2024

International scientifijournal
«MODERN SCIENCE AND RESEARCH»
VOLUME 3 / ISSUE 4 / UIF:8.2 / MODERNSCIENCE.UZ

izlanayotganlarga nisbatan avtonom tenglamalarga o‘tishga imkon beradigan shaklda taqdim etilishi zarur.

[2,3] materiallariga murojaat qilaylik va $A = B\Lambda B^{-1}$, B – bu yerda elementlari $b_{s,p} = (-1)^{s+p}\sqrt{\dfrac{2}{N+1}}\sin\dfrac{\pi sp}{N+1}$ A ga o‘xshash bo‘lgan fundamental matritsa Λ $\lambda_s = -2\left(1+\cos\dfrac{\pi s}{N+1}\right)$ lardan iborat diagonal matritsa; B^{-1} – elementlari $b^{-}_{s,p} = b_{s,p}$ lardan iborat B ga teskari matritsa.

Biz (1) tenglamaning ikkala tomonini chapdan B^{-1} ga ko‘paytirib,

$$\frac{dB^{-1}U}{dt} = \frac{a^2}{h^2}B^{-1}AU + B^{-1}F$$

tenglikni hosil qilamiz.

Yangi vektor-ustunni kiritamiz:

$$B^{-1}U = BU = \bar{U} = \left(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\dots,\ \bar{u}_{N-1},\ \bar{u}_N\right)^* =$$
$$= \left(\sum_{p=1}^{N} b_{1,p}u_p,\ \sum_{p=1}^{N} b_{2,p}u_p,\dots,\ \sum_{p=1}^{N} b_{N-1,p}u_p,\ \sum_{p=1}^{N} b_{N,p}u_p\right)^*,$$

$A = B\Lambda B^{-1}$ bo‘lgani uchun quyidagi tenglik o‘rinli.

$$B^{-1}AU = B^{-1}B\Lambda B^{-1}U = \left(B^{-1}B\right)\Lambda\left(B^{-1}U\right) = \Lambda\bar{U}$$

U holda tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{a^2}{h^2}\Lambda\bar{U} + \bar{F}, \tag{2}$$

bu yerda

$$\bar{F} = B^{-1}F = BF = \left(\bar{f}_1,\ \bar{f}_2,\dots,\ \bar{f}_{N-1},\ \bar{f}_N\right)^* =$$
$$= \left(b_{1,1}\left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_0^{n+1}\right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{1,r}f_r^{n+1} + b_{1,N}\left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_l^{n+1}\right),\right.$$
$$b_{2,1}\left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_0^{n+1}\right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{2,r}f_r^{n+1} + b_{2,N}\left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_l^{n+1}\right),\dots,$$
$$b_{N-1,1}\left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_0^{n+1}\right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{N-1,r}f_r^{n+1} + b_{N-1,N}\left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_l^{n+1}\right),$$
$$\left. b_{N,1}\left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_0^{n+1}\right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{N,r}f_r^{n+1} + b_{N,N}\left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_l^{n+1}\right)\right)^*.$$

(2) dan $\bar{u}_i$ ga nisbatan alohida oddiy tenglamani ajratish mumkin:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{a^2}{h^2}\lambda_i \bar{u}_i + \bar{f}_i \tag{3}$$

Ushbu tenglama uchun boshlang‘ich shart bo‘lib, $\bar{U} = B^{-1}U = BU$ tenglikka ko‘ra, $\bar{U} = B^{-1}U = BU$ ifoda xizmat qiladi. $\bar{u}_i^0 = \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} u_p^0$ deb qabul qilamiz, bu yerda $u_p^0 = T\left(ph, 0\right)$ berilgan masalaning boshlang‘ich shartidan iborat.

Tenglama (3) ni sonli usul bilan yechamiz. Vaqt bo‘yicha yaqinlashishning ikkinchi tartib aniqligini tashkil qilish mumkin. Bayonning soddaligi uchun biz orqaga qaytish sxemasidan foydalanamiz va vaqt bo‘yicha yuqori indekslarni kiritamiz:

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\tau_n} = \frac{a^2}{h^2}\lambda_i \bar{u}_i^{n+1} + \bar{f}_i^{n+1}.$$

Bundan $\bar{u}_i^{n+1} = \dfrac{\bar{u}_i^n + \tau_n \bar{f}_i^{n+1}}{1 - \tau_n a^2 \lambda_i / h^2} = d_i\left(\bar{u}_i^n + \tau_n \bar{f}_i^{n+1}\right)$ ni topamiz. Bu yerda $d_i = 1/\left(1 - \tau_n a^2 \lambda_i / h^2\right)$ belgilashdan foydalanib, yangi vaqt uchun izlanayotgan harorat funksiyasiga teskari o‘tishni amalga oshiramiz:

$$U^{n+1} = B\bar{U}^{n+1} = \left(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{N-1}^{n+1}, u_N^{n+1}\right) =$$
$$= \left(\sum_{p=1}^{N} b_{1,p}\bar{u}_p^{n+1}, \sum_{p=1}^{N} b_{2,p}\bar{u}_p^{n+1}, \dots, \sum_{p=1}^{N} b_{N-1,p}\bar{u}_p^{n+1}, \sum_{p=1}^{N} b_{N,p}\bar{u}_p^{n+1}\right).$$

Endi biz izlanayotgan funksiyani chegaradagi faraz qilingan qiymatlari bilan funksiyaning devor tugunlarida topilgan yangi qiymatlari orasidagi bog‘liqlikni o‘rnatamiz, ya’ni chegaraviy shartlarni qanoatlantiramiz.

Bizni izlanayotgan funksiya hosilasi kamida bitta chegara shartda qatnashadigan holatlar qiziqtiradi. Va umuman olganda, izlanayotganning chegara qiymati bilan birga, chekli-ayirmali tenglamada ikkita qo‘shni tugunlardagi funksiya qiymatlari ishtirok etgan holda yaqinlashishning ikkinchi tartibga ega bo‘lgan yo‘naltirilgan hosilalar qo‘llanilgan deb qabul qilamiz. Ya’ni umumiy holda, $x = 0$ uchun

$$\mu_0^{n+1} = \alpha_0 u_1^{n+1} + \beta_0 u_2^{n+1} + \theta_0, \tag{4}$$

shart qabul qilinadi $x = l$ da esa –

$$\mu_l^{n+1} = \alpha_l u_N^{n+1} + \beta_l u_{N-1}^{n+1} + \theta_l \tag{5}$$

qabul qilinadi. Umumiy holda $\alpha_0, \beta_0, \theta_0$, $\alpha_l, \beta_l, \theta_l$ koeffitsientlarning qiymatlari vaqtga bog‘liq bo‘lishi mumkin.

To‘g‘ri chiziqlar usuli bilan topilgan u_1, u_2, u_{N-1} va u_N ning qiymatlarini quyidagicha ochib beramiz:

$$u_i^{n+1} = \sum_{p=1}^{N} b_{i,p}\bar{u}_p^{n+1} = \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} d_p\left(\bar{u}_p^n + \tau_n \bar{f}_p^{n+1}\right) = \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} d_p \bar{f}_p^{n+1}.$$

Bu yerda $\bar{f}_p^{n+1} = b_{p,1}\left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_0^{n+1} \right) + \sum_{r=2}^{N-1} b_{p,r} f_r^{n+1} + b_{p,N}\left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_l^{n+1} \right).$

Shu munosabat bilan

$$u_i^{n+1} = \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} d_p \left[b_{p,1}\left(f_1^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_0^{n+1} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=2}^{N-1} b_{p,r} f_r^{n+1} + b_{p,N}\left(f_N^{n+1} + \frac{a^2}{h^2}\mu_l^{n+1} \right) \right] = \mu_0^{n+1} \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} b_{p,1} d_p +$$

$$+ \mu_l^{n+1} \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} b_{p,N} d_p + \sum_{p=1}^{N} b_{i,p} d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^{N} \sum_{r=1}^{N} b_{i,p} b_{p,r} d_p f_r^{n+1}.$$

Ushbu to‘r funksiyaning qiymatlarini mos keladigan indekslarda chegaraviy shartlar yaqinlashishlariga qo‘yamiz.

Birinchi shartdan $\mu_0^{n+1} = \mu_0^{n+1} a_0 + \mu_l^{n+1} b_0 + c_0$ kelib chiqadi. Bu yerda

$$a_0 = \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^{N} \left(\alpha_0 b_{1,p} + \beta_0 b_{2,p} \right) b_{p,1} d_p,\; b_0 = \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^{N} \left(\alpha_0 b_{1,p} + \beta_0 b_{2,p} \right) b_{p,N} d_p,$$

$$c_0 = \sum_{p=1}^{N} \left(\alpha_0 b_{1,p} + \beta_0 b_{2,p} \right) d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^{N} \sum_{r=1}^{N} \left(\alpha_0 b_{1,p} + \beta_0 b_{2,p} \right) b_{p,r} d_p f_r^{n+1} + \theta_0.$$

Ikkinchi shart bilan xam xuddi shunday qilamiz va $\mu_l^{n+1} = \mu_0^{n+1} a_l + \mu_l^{n+1} b_l + c_l$ tenglikni olamiz, bu yerda

$$a_l = \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^{N} \left(\alpha_l b_{N,p} + \beta_l b_{N-1,p} \right) b_{p,1} d_p,\; b_l = \frac{\tau_n a^2}{h^2} \sum_{p=1}^{N} \left(\alpha_l b_{N,p} + \beta_l b_{N-1,p} \right) b_{p,N} d_p,$$

$$c_l = \sum_{p=1}^{N} \left(\alpha_l b_{N,p} + \beta_l b_{N-1,p} \right) d_p \bar{u}_p^n + \tau_n \sum_{p=1}^{N} \sum_{r=1}^{N} \left(\alpha_l b_{N,p} + \beta_l b_{N-1,p} \right) b_{p,r} d_p f_r^{n+1} + \theta_l.$$

Yangi olingan ikkita chiziqli tenglamalardan sistema tuzamiz:

$$\begin{cases} \left(1 - a_0\right)\mu_0^{n+1} - b_0 \mu_l^{n+1} = c_0, \\ -a_l \mu_0^{n+1} + \left(1 - b_l\right)\mu_l^{n+1} = c_l. \end{cases} \tag{6}$$

Ushbu sistema asosiy matritsasining determinanti noldan farqli $\Delta = \left(1 - a_0\right)\left(1 - b_l\right) - a_l b_0$ qiymatga ega deb faraz qilamiz. U holda izlanayotgan funksiyaning chegaraviy qiymatlari uchun

$$\mu_0^{n+1} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(1 - b_l\right) c_0 + b_0 c_l \right],\quad \mu_l^{n+1} = \frac{1}{\Delta}\left[a_l c_0 + \left(1 - a_0\right) c_l \right]$$

ifodalarga ega bo‘lamiz.

Izlanayotgan funksiyaning topilgan chegaraviy qiymatlariga faqat fundamental va diagonal matritsalarning ma’lum elementlari, shuningdek berilgan masalaning chegaraviy shartlari elementlari kirdi. Ular chegaraviy shartlarini qanoatlantiradilar. Faqat chegaraviy shartlar yaqinlashishidan $\alpha_0, \beta_0, \theta_0$, $\alpha_l, \beta_l, \theta_l$ koeffitsiyentlarning qiymatlarini aniqlash qoldi.

Klassik issiqlik uzatish nazariyasida to‘rtinchi turdagi chegaraviy shart deb ataladigan va bir vaqtning o‘zida ikkinchi va uchinchi turdagi shartlarni umumlashtiradigan chegaraviy shartlarga to‘xtalamiz:

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \xi_0 \left[T_{oc}(t) - T(0,t) \right] + \varsigma_0 R_0(t),$$

$$\lambda \frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = \xi_l \left[T_{oc}(t) - T(l,t) \right] + \varsigma_l R_l(t).$$

Bu yerda λ – materialning o‘rtacha issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti; ξ – material va harorati $T_{oc}(t)$ deb qabul qilingan atrof-muhit o‘rtasidagi issiqlik uzatish koeffitsiyenti; ς – nurli energiya materialining yutilish koeffitsiyenti; $R(t)$ – nurli energiya intensivligi. Oxirgi uchta ko‘rsatkich chegaralarning har biriga mos ravishda indekslar bilan belgilangan.

Birinchi shartni

$$-\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \frac{\xi_0}{\lambda} \left[T_{oc}(t) - T(0,t) \right] + \frac{\varsigma_0}{\lambda} R_0(t)$$

ko‘rinishda yozamiz va unga ikkinchi tartibli aniqlikdagi approksimatsiyani qo‘llaymiz:

$$\frac{3\mu_0^{n+1} - 4u_1^{n+1} + u_2^{n+1}}{2h} = \frac{\xi_0}{\lambda} \left(T_{oc}^{n+1} - \mu_0^{n+1} \right) + \frac{\varsigma_0}{\lambda} R_0^{n+1}.$$

Tenglamani $2h\lambda$ ga ko‘paytiramiz va o‘xshash hadlarni ixchamlaymiz:

$$\left(3\lambda + 2h\xi_0\right)\mu_0^{n+1} = 4\lambda u_1^{n+1} - \lambda u_2^{n+1} + 2h\left(\xi_0 T_{oc}^{n+1} + \varsigma_0 R_0^{n+1}\right).$$

Bu yerda biz avval qabul qilingan shartning (4) shakliga o‘tamiz, uning uchun koeffitsientlarning qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\alpha_0 = \frac{4\lambda}{3\lambda + 2h\xi_0}, \quad \beta_0 = -\frac{\lambda}{3\lambda + 2h\xi_0}, \quad \theta_0 = \frac{2h\left(\xi_0 T_{oc}^{n+1} + \varsigma_0 R_0^{n+1}\right)}{3\lambda + 2h\xi_0}.$$

Yo‘naltirilgan hosilalarning ikkinchi shartga shunga o‘xshash qo‘llanilishi quyidagi chekli-ayirmali tenglamaga olib keladi:

$$\frac{3\mu_l^{n+1} - 4u_N^{n+1} + u_{N-1}^{n+1}}{2h} = \frac{\xi_l}{\lambda} \left(T_{oc}^{n+1} - \mu_l^{n+1} \right) - \frac{\varsigma_l}{\lambda} R_l^{n+1}.$$

Maxrajlardan xalos bo‘lish va o‘xshash hadlarni ixchamlash shartning (5) koeffisiyentlari qiymatlariga olib keladi:

$$\alpha_l = \frac{4\lambda}{3\lambda + 2h\xi_l}, \quad \beta_l = -\frac{\lambda}{3\lambda + 2h\xi_l}, \quad \theta_l = \frac{2h\left(\xi_l T_{oc}^{n+1} + \varsigma_l R_l^{n+1}\right)}{3\lambda + 2h\xi_l}.$$

To‘rtinchi turdagi chegara sharti uchun katta hajmdagi hisoblashlar talab etadigan μ_0^{N+1} va μ_l^{N+1} larni shakllantirishning bir variantini keltirdik. Chegaraviy shartlarning boshqa kombinasiyalarida koeffitsientlar uchun formulalar qisqaradi. Masalan, agar $x = 0$ da birinchi turdagi shart berilgan bo‘lsa, u holda birinchi tenglama (6) tenglamalar sistemasidan tushib qoladi va hokazo. Shuni inobatga olgan holda, ma'lum bir chegaraviy masalani yechishda (6) sistemaning μ_0^{N+1} va μ_l^{N+1} larga nisbatan yechimlarini takrorlash maqsadga muvofiqdir, bu esa hisoblash vaqtining qisqarishiga olib keladi.

Umuman olganda, ma'lum bir masalani hal qilish uchun hisoblash jarayoni quyidagi algoritmga muvofiq amalga oshirilishi mumkin.

1. Dastlabki ma'lumotni, shu jumladan $\alpha_0, \beta_0, \theta_0$, $\alpha_l, \beta_l, \theta_l$ koeffitsientlarning qiymatlarini kiritish.

2. B va Λ matritsalarni shakllantirish.

3. Elementlari u_i^0 lardan iborat vektorni shakllantirish.

4. Elementlari $\overline{u}_i^0$ lardan iborat vektorni shakllantirish va $n=0$ deb qabul qilish.

5. $\overline{u}_0^{n+1}$ va $\overline{u}_i^{n+1}$ va larni hisoblash.

6. Ichki tugunlar uchun $\overline{u}_i^{n+1}$ larni hisoblash.

7. $\overline{u}_i^{n+1}$ga oldindan o'tish bilan shartli saqlash.

8. n ni qiymatini 1 ga oshirib va $\overline{u}_i^{n+1}$qiymatlarni $\overline{u}_i^n$ yozib olib, vaqt bo'yicha keyingi qadamga o'tish

9. Agar vaqt bo'yicha hisoblashlar oxiriga yetgan bo'lsa, unda 10-bandga o'tish, aks holda 5-bandga o'tish.

10. Hisoblashlarning oxiri.

Ushbu paragraf natijalarini muhokama qilamiz.

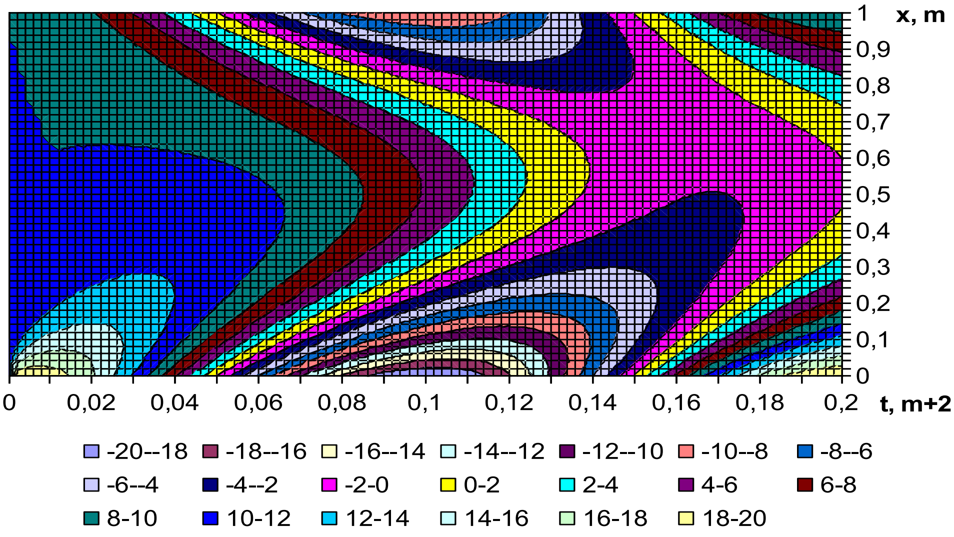
Ixtiyoriy chegaraviy shartlarga ega masalani to'g'ri chiziqlar usulida yechish uchun ilgari ishlab chiqilgan Dirixle masalasiga keltirish usuli taklif qilindi.

Ikki va uch o'lchovli masalalarni yechishda chegaraviy shartni almashtirishning yuqorida keltirilgan usuli koordinatalarning har biri uchun qo'llaniladi, ammo to'r funksiyalariga qo'shimcha indekslar qo'shiladi va $\dfrac{d\overline{u}_i^{n+1}}{dt}$ had esa, masalan, $\dfrac{\partial \overline{u}_{i,j,k}^{n+1}}{\partial t} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 \overline{u}_{i,j,k}^{n+1}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \overline{u}_{i,j,k}^{n+1}}{\partial z^2}\right)$ bilan almashtiriladi va hokazo.

NATIJA

Elliptik, parabolik va giperbolik tipdagi tenglamalarga asoslangan bir va ko'p o'lchovli masalalar bo'yicha ishni davom ettirish maqsadga muvofiq. Chunki boshqa usullardan farqli ravishda aniq natija olinadi.

1−rasmda ushbu dasturni qo'llashning namunaviy natijasi keltirildi. Uzunligi 1 m bo'lgan bir jinsli sterjenda issiqlik uzatish jarayoni uchun hisoblashlar olib borildi. $N=49$ da x bo'yicha qadam 0,02 m ni tashkil etdi. t vaqt bo'yicha qadam 0,0001 s qiymatga ega bo'ldi. Vaqt bo'yicha har 20 qadamdan so'ng harorat maydoni saqlanib qolindi, bu izotermalar shaklida (t,x) hisoblash tekisligida aks ettirildi.



1-rasm. Bir o‘lchovli sohada harorat maydonining dinamikasi.

$$f\left(x,t\right)=0,\ T_0(x)=5^0C,\ \mu_0(t)=20\cos 10\pi t \text{ va } \mu_l(t)=10\cos 10\pi t$$

XULOSA

Chegaraviy shartlarni Dirixle masalasi shartlari bilan *x* koordinata bo‘yicha ikkinchi tartibli aniqlik bilan chegaraviy shartlari approksimatsiyalash amalga oshirildi. Ichki tugunlar uchun ikkinchi aniqlik tartibiga ega sxema ham qo‘llanilishi mumkin bo‘lgani uchun usul *x* bo‘yicha yaqinlashuv aniqligining ikkinchi tartibini ta’minlaydi.

Usulning zaif tomoni – izlanayotgan funksiyaga nisbatan avtonom tenglamani yechish uchun oddiy differensial tenglamalarni yechishning aniq usulidan foydalanishning istisno qilinganligi. Ammo chekli-ayirmali tenglamaning o‘ng tomonini ikki vaqt qadami uchun o‘rtacha arifmetik sifatida ifoda etish orqali vaqt bo‘yicha aniqlik tartibini oshirish imkoniyati mavjud.

Usulning asosiy ustunligi shundaki, u chegara shartlarining odatiy yaqinlashuviga qaytishga imkon beradi (to‘g‘ri chiziqlar usulida chegara shartlari uchun integro-interpolyatsiya usuli qo‘llaniladi). Bu bilan ilgari differensial-ayirmali usul doirasida ko‘rib chiqilmagan muayyan chegara (kesma, to‘g‘ri to‘rtburchak) ning alohida qismlariga har xil chegara shartlari qo‘yilgan hollar hisobiga differensial-ayirmali usuli bilan hal qilinadigan masalalar sinfi kengayadi.

REFERENCES

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – 464 (часть I), 360 (часть II) с.
2. Бадалов Ф. Применение метода прямых к численному решению некоторых задач теории упругости: Автореферат дисс. … канд. физ.-мат. наук. – Ташкент, 1967. – 15 с.
3. Слободянский М.Г. Способ приближенного интегрирования уравнений в частных производных и его применение к задачам теории упругости // ПММ, Т.III, вып.1, 1939.
4. Шаимов К.М., Эшмуродов М.Х., Хужаев И.К. Дифференциально-разностный метод для двумерных линейных задач теплопередачи // Научный вестник. СамГУ – 2020, – №1(121). – С.78-87(01.00.00.; № 2).

5. M Kh Eshmurodov, K.M. Shaimov, I Khujaev and J Khujaev Method of lines for solving linear equations of mathematical physics with the third and first types boundary conditions. Journal of Physics: Conference Series 2131 (2021) 032041, doi:10.1088/1742-6596/2131/3/032041
6. K. M. Shaimov, M. Kh. Eshmurodov, I. Khujaev and Zh. I. Khujaev The Method of Lines for Solving Equations of Mathematical Physics with Boundary Conditions of the First and Third Types // The method of lines for solving equations of mathematical physics with boundary conditions of the first and third types, Cite as: AIP Conference Proceedings 2612, 030028 (2023); https://doi.org/10.1063/5.0124614, Published Online: 15 March 2023